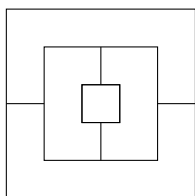


مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور، روز اول، آزمون تستی

- سؤال‌های ۱۳ تا ۲۰ در چند دسته‌ی سؤالی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن‌ها آمده است.
- نمره‌دهی به همه‌ی سؤال‌ها یکسان می‌باشد. جواب درست به هر سؤال ۴ نمره‌ی مثبت و جواب نادرست ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سوال به شکل تصادفی است.



(۱) در شکل روبرو تصویری هوایی از ۵ ساختمان شهر اتوپیا را می‌بینید که خطوط در آن نشان دهنده‌ی اختلاف ارتفاع ساختمان‌ها است. در واقع هر ناحیه‌ی بسته یک ساختمان را نشان می‌دهد که ارتفاعش عددی طبیعی بین ۱ تا ۴ است و با هیچ یک از ساختمان‌های مجاورش هم‌ارتفاع نیست. ارتفاع ساختمان‌های این شهر چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- ۲۴ (۵) ۹۶ (۴) ۱۴۴ (۳) ۴۸ (۲) ۳۶ (۱)

(۲) عدد صحیح k ، مرید عدد طبیعی n است اگر جایگشتی از اعداد ۱ تا n مانند (a_1, a_2, \dots, a_n) داشته باشیم که در آن به ازای هر $1 \leq i \leq n$ ، $|a_i - i|$ مساوی با k شود. اگر قدرت یک عدد مساوی با بزرگترین مرید آن باشد، جمع قدرت اعداد ۱ تا ۲۰ چند است؟

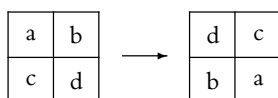
- ۵۵ (۵) ۶۴ (۴) ۱۰۰ (۳) ۶۰ (۲) ۸۰ (۱)

(۳) گرافی ۱۰۰ راسی را در نظر بگیرید. می‌خواهیم بین بعضی از رئوس آن یال قرار دهیم به طوری که بین هر دو راس حداکثر یک یال باشد و اگر راس‌ها را به هر روشی به دو بخش افراز کنیم، در حداقل یکی از بخش‌ها دور وجود داشته باشد. حداقل چند یال لازم داریم؟

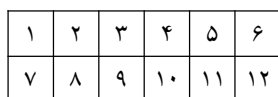
- ۶ (۵) ۲۲ (۴) ۱۶ (۳) ۱۰ (۲) ۲۰ (۱)

(۴) خیکول و هرکول روی یک جدول $2 \times n$ به نوبت بازی می‌کنند. در ابتدا خانه‌های جدول خالی است. هرکس در نوبت خود دو خانه‌ی مجاور را که قبلاً هیچ کدام خط نخورده‌اند، خط می‌زند و کسی که نتواند حرکتی انجام دهد بازنده است. دو خانه مجاور هستند اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. با فرض اینکه خیکول شروع کننده‌ی بازی است، به ازای چه تعداد n از مجموعه‌ی $\{۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۲, ۳۴, ۶۴\}$ ، خیکول می‌تواند طوری بازی کند که برنده شود؟

- ۷ (۵) ۶ (۴) ۵ (۳) ۴ (۲) ۸ (۱)



شکل «الف»



شکل «ب»

(۵) یک جدول 2×6 داریم که اعداد ۱ تا ۱۲ در خانه‌های آن نوشته شده است. در هر مرحله می‌توانیم ۴ خانه را که تشکیل یک مربع 2×2 می‌دهند انتخاب کنیم و مثل شکل «الف» خانه‌های قطری را با هم جابه‌جا کنیم. هدف این است که بعد از چند مرحله اعداد جدول را مثل شکل «ب» مرتب کنیم. به ازای چند حالت قرارگیری اعداد در جدول اولیه این کار امکان‌پذیر است؟

- ۶! (۵) ۲۵ (۴) ۱۲! (۳) $6!^2$ (۲) $\binom{12}{6}$ (۱)

(۶) خیکوله یک گراف ساده‌ی ۴ راسی کشیده است و راس‌های آن را با اعداد ۱ تا ۴ شماره‌گذاری کرده است. او از نازخیکول می‌خواهد با پرسیدن تعدادی پرسش گرافش را حدس بزند. پرسش‌هایی که نازخیکول می‌پرسد به این شکل است که «بین راس‌های x و y و z در مجموع چند یال وجود دارد؟».

به ازای چندتا از گراف‌هایی که خیکوله می‌تواند بکشد، نازخیکول با پرسیدن تعداد دلخواهی از این پرسش‌ها می‌تواند آن را حدس بزند؟ دقت کنید که راس‌ها شماره دارند و بنابراین خیکوله ۶۴ گراف مختلف می‌تواند بکشد.

- ۴۲ (۵) ۴۰ (۴) ۴۸ (۳) ۴۶ (۲) ۴۴ (۱)

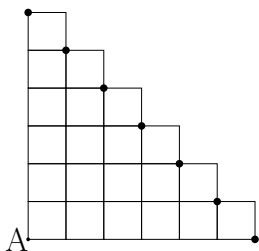
مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور، روز اول، آزمون تستی

(۷) دارا و سارا اعداد ۱ تا ۵ را روی تخته نوشته‌اند. آنها به نوبت بازی می‌کنند و هرکس در نوبت خود یکی از دو عمل زیر را انجام می‌دهد:

- دو عدد را از روی تخته پاک می‌کند و حاصل جمع آنها را روی تخته می‌نویسد.
- دو عدد را از روی تخته پاک می‌کند و قدر مطلق تفاضل آنها را روی تخته می‌نویسد.

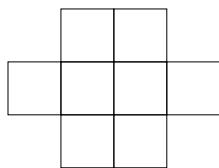
سارا می‌خواهد عددی که در انتها روی تخته باقی می‌ماند بیشینه شود و دارا می‌خواهد این عدد کمینه شود. با فرض اینکه سارا بازی را شروع می‌کند و هر دو ی آنها به بهترین شکل ممکن بازی می‌کنند، عددی که در انتها روی تخته باقی می‌ماند چند است؟

۱۱ (۱) ۹ (۲) ۷ (۳) ۵ (۴) ۳ (۵)



(۸) قورباغه‌ای می‌خواهد از نقطه‌ی A در شکل مقابل به یکی از ۷ نقطه‌ی مشخص شده برود. با فرض اینکه او در هر مرحله می‌تواند k واحد ($1 \leq k \leq 6$) به سمت بالا یا به سمت راست بپرد، به چند طریق می‌تواند به نقاط مشخص شده برسد؟ برای مثال یک مسیر ممکن این است که در یک پرش ۶ واحد به سمت راست بپرد. یک مسیر دیگر این است که ابتدا ۳ واحد به سمت راست بپرد، سپس ۳ واحد دیگر به سمت راست بپرد.

۱۴! / (۷! × ۷!) (۱) ۲ × ۳⁵ (۲) ۲¹⁴ (۳) ۱۴! / (۶! × ۶!) (۴) ۱۲! / (۲ × ۶! × ۶!) (۵)



(۹) می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۸ را درون خانه‌های جدولی به شکل روبرو بچینیم به طوری که اختلاف هر دو عدد مجاور بیش از یک نباشد. دو خانه مجاور هستند اگر یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند. برای مثال خانه‌های وسط جدول با ۶ خانه مجاور هستند. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

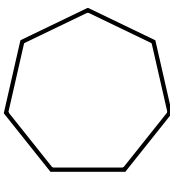
۲ (۱) ۱۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶ (۵)

(۱۰) یک جدول 5×5 زیباست اگر شرایط زیر را داشته باشد:

۱. در هر خانه‌ی آن عددی صحیح بین ۱ تا ۵ نوشته شده باشد (خود ۱ و ۵ هم می‌تواند باشد).
۲. عدد نوشته شده در حداقل یکی از خانه‌ها برابر ۵ باشد.
۳. عدد هر خانه از عدد خانه‌ی بالایی و راستی‌اش (در صورت وجود) کمتر نباشد.
۴. به ازای هر خانه مثل x حداقل یکی از دو عبارت زیر درست باشد:
 - عدد خانه‌ی x بزرگترین عدد سطری است که x در آن قرار دارد.
 - عدد خانه‌ی x بزرگترین عدد ستونی است که x در آن قرار دارد.

چند جدول زیبای 5×5 داریم؟

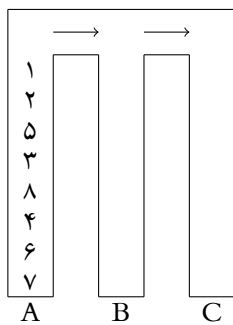
۱ (۱) ۵!² (۲) (۸)² (۳) ۵¹ (۴) (۹)² (۵)



(۱۱) خیز یک نوع میز است که ۷ پایه دارد و پایه‌های آن به صورت یک ۷ ضلعی منتظم در محیط‌اش قرار گرفته‌اند. اگر بدانیم بر اثر زلزله هر پایه‌ی خیز مستقل از بقیه پایه‌ها به احتمال ۰.۵ می‌شکند، احتمال افتادن خیز بر اثر زلزله چقدر است؟ خیز در صورتی می‌افتد که خطی گذرنده از مرکز آن وجود داشته باشد، به طوری که همه‌ی پایه‌های سالم یک طرف آن خط باشند. به عنوان مثال اگر فقط یک پایه‌ی خیز بشکند، نمی‌افتد.

۱/۲ (۱) ۷۱/۱۲۸ (۲) ۵۰/۱۲۸ (۳) ۵۷/۱۲۸ (۴) ۷۸/۱۲۸ (۵)

مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور، روز اول، آزمون تستی



(۱۲) در پارکینگ خیگول‌آباد ۸ ماشین که با اعداد ۱ تا ۸ شماره‌گذاری شده‌اند، مطابق شکل در راهروی A قرار دارند. در هر مرحله یا بالاترین ماشین راهروی A وارد یکی از راهروهای B یا C می‌شود، یا بالاترین ماشین راهروی B وارد راهروی C می‌شود. فرض کنید در انتها تمام ماشین‌ها در ستون C باشند. در این صورت تعداد جفت اعداد متوالی در ستون C که حاصل جمع‌شان مضرب ۳ است حداکثر چند است؟

- ۴ (۵) ۶ (۴) ۷ (۳) ۵ (۲) ۳ (۱)

سؤال‌های ۱۳ تا ۲۰ در چند دسته‌ی سؤال‌ی آمده‌اند و پیش از هر دسته توضیح مربوط به آن‌ها آمده است.

یک جایگشت n تایی را «دانا» می‌نامیم، هرگاه به ازای هر i ، عددی که در جای i ام نوشته شده است به اضافه‌ی شماره‌ی جایگاهی که عدد i در آن نوشته شده است، برابر با $n + 1$ باشد. برای مثال جایگشت $\langle 3, 1, 4, 2 \rangle$ یک جایگشت ۴ تایی دانا است، اما جایگشت $\langle 4, 3, 2, 1 \rangle$ دانا نیست.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید.

(۱۳) به ازای چه تعداد n از مجموعه‌ی $\{2010, 2011, 2012, 2013, 2014\}$ ، جایگشت n تایی دانا وجود دارد؟

- ۳ (۵) ۵ (۴) ۱ (۳) ۴ (۲) ۲ (۱)

(۱۴) چند جایگشت دانا ۲۱ تایی وجود دارد؟

- $\frac{10!}{5!}$ (۵) $10!$ (۴) $\frac{10!}{5! \times 2^5}$ (۳) ۰ (۲) $\frac{10!}{5! \times 2^{10}}$ (۱)

الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۱. عدد x را از ورودی بگیر.
۲. y را برابر صفر قرار بده. s را برابر یک قرار بده.
۳. b را برابر با باقیمانده‌ی تقسیم x بر ۲ قرار بده.
۴. مقدار $s \times b$ را به y اضافه کن.
۵. x را برابر $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ قرار بده.
۶. اگر x بزرگتر از صفر بود، s را برابر $-s$ قرار بده و به سطر سه برو.
۷. پایان

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید.

(۱۵) به ازای چه تعداد عدد ورودی از اعداد ۰ تا 10^{23} ، در پایان y برابر صفر خواهد بود؟

- 2^8 (۵) 300 (۴) 3^5 (۳) $\binom{10}{5}$ (۲) $\binom{6}{3}$ (۱)

مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر کشور، روز اول، آزمون تستی

۱۶) به ازای چه تعداد عدد ورودی از اعداد ۰ تا ۱۰۲۳، در پایان y مضرب سه خواهد بود؟

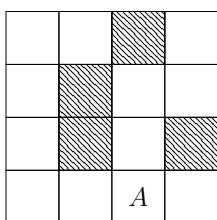
- (۱) $3^5 \times 2$ (۲) $\binom{8}{4}$ (۳) ۳۴۲ (۴) ۲۴۳ (۵) 3×2^7

خالپشت‌ها، موجوداتی قابل برنامه‌ریزی هستند که در جدول‌های $n \times n$ زندگی می‌کنند. در بعضی خانه‌های این جدول‌ها دیوار وجود دارد و عبور از آنها ممکن نیست. خالپشت‌ها دنباله‌ای از دستورها را دریافت می‌کنند و آنها را به ترتیب اجرا می‌کنند. دستورها می‌توانند از چهار نوع زیر باشند:

- بالا: خالپشت به خانه‌ی بالایی خود می‌رود.
- پایین: خالپشت به خانه‌ی پایینی خود می‌رود.
- چپ: خالپشت به خانه‌ی چپی خود می‌رود.
- راست: خالپشت به خانه‌ی راستی خود می‌رود.

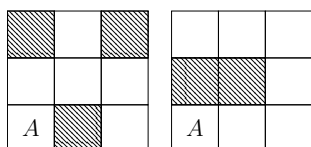
در صورتی که اجرای یک دستور، خالپشت را به خارج از جدول یا به خانه‌ای که در آن دیوار است ببرد، خالپشت دستور را اجرا نمی‌کند و به سراغ دستور بعدی می‌رود.

با توجه به توضیحات بالا به ۴ سؤال زیر پاسخ دهید



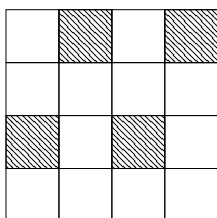
۱۷) خیکوله خالپشتی پیدا کرده است که در یک جدول 4×4 به شکل روبرو زندگی می‌کند. خالپشت در خانه‌ی A قرار دارد و خانه‌های هاشور خورده، خانه‌هایی هستند که در آنها دیوار است. خیکوله می‌خواهد دنباله‌ای با کمترین تعداد دستور به خالپشت بدهد که بعد از اجرای آن خالپشت از همه‌ی خانه‌های جدول حداقل یکبار عبور کرده باشد. تعداد دستورات این دنباله چند است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۱۶ (۴) ۱۰ (۵) ۱۴



۱۸) نازخیکول به خیکوله دو جدول 3×3 به شکل روبرو می‌دهد که در هر کدام یک خالپشت در خانه‌ی A وجود دارد. نازخیکول از خیکوله می‌خواهد، دنباله‌ای از دستورات با کمترین تعداد دستور پیدا کند که وقتی هر دو خالپشت آن را اجرا کردند، از همه‌ی خانه‌های جدول خود حداقل یکبار عبور کنند. تعداد دستورات این دنباله چند است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۷ (۳) ۱۲ (۴) ۹ (۵) ۱۳



۱۹) حالا خیکوله به نازخیکول یک جدول 4×4 به شکل روبرو می‌دهد و به او می‌گوید که در این جدول دو خالپشت وجود دارد اما جای خالپشت‌ها را به نازخیکول نمی‌گوید. خیکوله از نازخیکول می‌خواهد، دنباله‌ای از دستورات با کمترین تعداد دستور پیدا کند که وقتی هر دو خالپشت آن را اجرا کردند، مستقل از اینکه در ابتدا در کجای نقشه بوده‌اند، در انتها هر دو در یک خانه قرار داشته باشند. تعداد دستورات این دنباله چند است؟

- (۱) ۵ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۶ (۵) ۷

۲۰) نازخیکول یک خالپشت را در یک جدول 4×4 مخفی کرده است و از خیکوله می‌خواهد جای آن را پیدا کند. برای این کار خیکوله می‌تواند در هر مرحله یک مربع 2×2 را مشخص کند و از نازخیکول بپرسد که «آیا خالپشت در این مربع 2×2 قرار دارد؟». با فرض اینکه خالپشت جای خود را در جدول عوض نمی‌کند، در بدترین حالت خیکوله حداقل چند سوال باید بپرسد تا بتواند جای خالپشت را تشخیص دهد؟

- (۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۴ (۵) ۶