باسمه تعالی

نوزدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر

آزمون پایانی درس گراف

سه‌شنبه ۲۷ مردادماه ۱۳۸۸ — مدت امتحان: سه و نیم ساعت

مسئله‌ی اول: مسطح اما در فضا ..... ۱۵ نمره

فرض کنید که تمام رئوس گراف G بر روی خط L در فضای ۳بعدی قرارگرفته‌اند و خود L بر روی صفحات $P_1, ..., P_k \in R^3$ قرار دارد. یالهای بین رئوس در گراف G در یکی از P_i ها و فقط در یک طرف L کشیده می‌شوند به شرطی که با هم تقاطع نداشته باشند. $c(G)$ را کمترین مقدار k قرار دهید که کشیدن گراف به صورت فوق امکان‌پذیر باشد.

برای مثال $c(K_3) = 1$ برای اینکه هر سه رأس در یک خط پشت سرهم قرار می‌گیرند و برای اتصال یال‌ها به هم یک صفحه کافی است که یال‌ها روی آن قرار می‌گیرند. همچنین $c(K_4) = 2$ است زیرا که همه به غیر از یک یال در یک صفحه بدون تقاطع می توانند رسم شوند و برای یال آخر یک صفحه لازم است.

۱) ثابت کنید که اگر G مسطح و دارای دور همیلتونی باشد، آنگاه $c(G) \leq 2$. (به یک گراف همیلتونی می‌گوییم هرگاه دوری وجود داشته باشد که از همه رئوس بگذرد.) (۱۰ نمره)

۲) ثابت کنید که اگر G غیرمسطح باشد، آنگاه $c(G) \geq 3$. (۵ نمره)

مسئله‌ی دوم: رنگ‌آمیزی محدود ..... ۳۰ نمره

فرض کنید مجموعه ای از رنگها C داده شده است. یک تخصیص لیستی از گراف G به هر رأس گراف یک زیرمجموعه از C نسبت می دهد به طوریکه برای رنگ‌آمیزی هر رأس از گراف فقط می‌توانیم از رنگ‌های موجود در مجموعه مربوط به آن رأس استفاده کنیم.

به بیان دقیق‌تر اگر $L : V \to p(C)$ آنگاه مجموعه رنگ‌های مجاز هر راس v ، $L(v)$ خواهد بود. با داشتن L به یک گراف Lـرنگ پذیر می گوییم اگر تابع $\phi : V \to C$ وجود داشته باشد که اولاً $\phi(v) \in L(v)$ و ثانیاً به ازای دو رأس مجاور u و v داشته باشیم: $\phi(u) \neq \phi(v)$.

به یک گراف kانتخاب پذیر می‌گوییم هرگاه به ازای هر تخصیص L که در آن به ازای هر رأس $|L(v)| \geq k$ برقرار باشد، گراف Lرنگ پذیر باشد. و به کوچکترین kای که گرافمان kانتخاب پذیر باشد، عدد انتخاب G گوییم و آن را با $ch(G)$ نشان می‌دهیم. برای مثال با دادن مجموعه‌های مساوی به هر راس ($L(v) = \{1, \cdots, k\}$) می توان دید که $ch(G) \geq \chi(G)$.

۱) ثابت کنید $ch(G) \leq deg(G) + 1 \leq \Delta(G) + 1$. ($deg(G)$ عبارتست از ماکزیمم $\delta(H)$ روی تمام زیرگراف‌های H از G). (۵ نمره)

در ابتدا به نظر می‌رسد که مساله kرنگ‌پذیری از مساله kانتخاب پذیری سخت تر باشد، زیرا به نظر می‌رسد بدترین حالت این است که همه مجموعه ها مساوی باشند. ولی این گزاره صحیح نمی باشد.

۲) برای مثال نقض گرافی مثال بزنید که ۲رنگ‌پذیر باشد و $ch(G) > 2$ (۱۰ نمره)

۳) به ازای هر k گرافی مثال بزنید که ۲رنگ‌پذیر باشد و $ch(G) \geq k$.(۱۵ نمره)

در صورتی که قسمت سوم را ثابت کنید، نمره قسمت دوم را نیز خواهید گرفت.

مسئله‌ی سوم: زیردنباله و گراف ..... ۳۰ نمره

الف) فرض کنید $G = F \cup H$. ثابت کنید $\chi(G) \leq \chi(F)\chi(H)$ (۵ نمره)

ب) فرض کنیم D یک سودهی از G باشد و $\chi(G) > rs$. فرض کنیم هر $v \in V(D)$ به یک عدد حقیق $f(v)$ تخصیص داده شده است. ثابت کنید D دارای یک مسیر $u_\circ \to \cdots \to u_r$ با $f(u_\circ) \leq ... \leq f(u_r)$ و یا یک مسیر $v_\circ \to \cdots \to v_s$ با $f(v_\circ) > \cdots > f(v_s)$ است. (۱۵ نمره)

ج) با استفاده از قسمت قبل ثابت کنید که هر دنباله از $rs + ۱$ عدد حقیقی متمایز دارای یک زیردنباله افزایشی به اندازه $r + ۱$ و یا یک زیردنباله کاهشی به اندازه $s + ۱$ است. (۱۰ نمره)

مسئله‌ی چهارم: تطابق عجیب ..... ۲۵ نمره

$۲n$ نقطه بر روی صفحه xy داده شده است. این نقاط را به عنوان رأس در نظر می‌گیریم. حال دو رأس را با یک یال به هم وصل می‌کنیم اگر دو نقطه، مؤلفه x یا مؤلفه y یکسانی داشته باشند. اگر گراف حاصل همبند باشد، ثابت کنید یک تطابق کامل نیز دارد.

خدایا
چگونه زیستن رو تو به من بیاموز
چگونه مردن رو خود خواهم دانست.

«موفّق باشید!»