باسمه‌تعالی

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون تئوری دوم

پنج شنبه ۲۳ تیر ۱۳۹۰

جبل‌عاملی، ایردموسی، جبل‌عاملی — وقت: ۵ ساعت

مسأله‌ی اول. مرتب‌سازی دنباله ..... ۳۰ امتیاز

x_1 تا x_n یک دنباله ی nتایی از اعداد حقیقی است. در هر مرحله می توانیم به ازای دو عدد طبیعی a و b که $a < n$ و $b < n$ و $a + 1 < b$، درصورتیکه $x_a + x_{a+1} < x_b + x_{b+1}$، اعداد x_a را با x_b و x_{a+1} را با x_{b+1} جابجا کنیم.

- الف) ثابت کنید به هرترتیبی که این کار را انجام دهیم، بعد از متناهی بار انجام آن، دیگر قادر به جابجا کردن عناصر نیستیم. (۱۵ امتیاز)
- ب) ثابت کنید تعداد دفعاتی که قادر به انجام چنین کاری هستیم، تابعی چند جمله ای از n است. (۱۵ امتیاز)

مسأله‌ی دوم. تقسیم کار در خیکولند ..... ۳۵ امتیاز

در کشور خیکولند n شهر وجود دارد و قرار است $n - 1$ شرکت هواپیمایی T_1، T_2، $\cdots$، T_{n-1}، برقراری ارتباط هوایی بین این شهرها را به عهده بگیرند. در ضمن می‌دانیم شرکت T_i قرار است مدیریت i خط هوایی را به عهده بگیرد (هر خط هوایی ارتباط دو شهر را در دو جهت رفت و برگشت پوشش می‌دهد). همچنین می‌دانیم شرکت T_i برای انتخاب i خط هوایی خود یکی از دو الگوی زیر را در نظر گرفته است:

(۱) الگوی ستاره : یک شهر توسط i خط هوایی به i شهر دیگر وصل می‌شود.

(۲) الگوی مسیر : i خط هوایی تشکیل یک مسیر به طول i را می‌دهند و $i + 1$ شهر را متوالیاً به هم وصل می‌کنند.

ثابت کنید الگوهای انتخابی شرکت ها هر طور باشند می‌توان ارتباط هوایی شهرها را بین این شرکت‌ها طوری تقسیم بندی کرد که بین هر دو شهر، دقیقاً یک خط هوایی برقرار باشد.

مسأله‌ی سوم. n- مینوی قشنگ ..... ۳۵ امتیاز

یک n- مینوی قشنگ در یک جدول $n * n$ به این شکل تعریف می شود:

- شامل دقیقا n خانه از جدول است که یک ناحیه ی همبند را می سازند. همبندی در اینجا معادل همبندی در یک گراف است با این فرض که هر خانه ی جدول را معادل یک راس گراف و هر ضلع مشترک بین دو خانه را معادل یک یال در گراف در نظر می گیریم.
- خانه ی پایین سمت چپ چدول حتما درون nمینو قرار دارد.

- به جز خانه ی پایین سمت چپ جدول، هر خانه ی دیگری که در n- مینو قرار دارد، باید حداقل یکی از دو خانه ی پایینی یا سمت چپی اش نیز درون n- مینو باشد.

اگر تعداد n- مینوهای قشنگ را با T_n نشان دهیم، ثابت کنید $۲^{n-۱} \leq T_n$ (۵ امتیاز) و $T_n \leq ۴^{n+۱}$ (۳۰ امتیاز).

«موفق باشید»