

باسمه تعالی

## دوره تابستانی المپیاد کامپیوتر

### امتحان تئوری سوم

پنجشنبه ۸ مرداد ۱۳۸۸

وقت: ۵ ساعت

#### سوال اول: آدم‌ها و فیلم‌ها ..... ۲۵ امتیاز

$n$  نفر آدم و  $n$  فیلم داریم. هر کس زیرمجموعه‌ای از این فیلم‌ها را دوست دارد. این آدم‌ها دو نوع‌اند. آدم‌های هر نوع زیرمجموعه‌ی یکسانی از فیلم‌ها را دوست دارند. به زبان دیگر آدم‌های یک نوع نظرشان در مورد فیلم‌ها یکسان است. ما نمی‌دانیم که چه آدم‌هایی هم‌نوع‌اند، ولی می‌دانیم که تعداد آدم‌های هر نوع حداقل یک است (یعنی از هر نوع آدم داریم). ما همچنین نمی‌دانیم که آدم‌های هر نوع چه زیرمجموعه‌ای از فیلم‌ها را دوست دارند. می‌توانیم با یک سوال بفهمیم که یک آدم یک فیلم را دوست دارد یا خیر. می‌خواهیم با کمترین تعداد سوال نظر همه‌ی آدم‌ها را در مورد همه‌ی فیلم‌ها بفهمیم. ثابت کنید حداقل  $n^2 - 1$  سوال برای این کار لازم است.

#### سوال دوم: گراف جهت‌دار ..... ۳۵ امتیاز

گراف جهت‌دار  $G$  به این صورت داده شده است که درجه‌ی خروجی هر راس  $k$  است. برای هر دو راس  $u$  و  $v$  تعداد یال‌ها از  $u$  به  $v$  از یک بیشتر نیست، اما ممکن است هم از  $u$  به  $v$  و هم از  $v$  به  $u$  یال داشته باشیم. ثابت کنید اگر  $k > \lfloor n/2 \rfloor$  باشد،  $G$  حتماً دور به طول ۳ دارد و اگر  $k \leq \lfloor n/2 \rfloor$  باشد،  $G$  ممکن است دور به طول ۳ نداشته باشد.

#### سوال سوم: عمل روی دنباله ..... ۴۰ امتیاز

دنباله‌ی  $a_1, a_2, \dots, a_n$  از اعداد طبیعی به ما داده شده است. این دنباله را در زمان  $O(n)$  در یک داده ساختار طوری ذخیره کنید که هر بار عمل وارون کردن آن در زمان  $O(\sqrt{n})$  صورت گیرد. در عمل وارون کردن به ما دو عدد  $i$  و  $j$  ( $i < j$ ) می‌دهند و از ما می‌خواهند که قسمت  $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$  در دنباله را وارون کنیم. یعنی دنباله‌ی ما بعد از این عمل

تبدیل به  $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{j-1}, \dots, a_i, a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_n$  تبدیل می‌شود. دقت کنید که ممکن است از ما خواسته شود چندین بار عمل وارون را با مقادیر مختلف  $i$  و  $j$  روی دنباله انجام دهیم تا به دنباله‌های جدیدی برسیم و ما باید هر بار در  $O(\sqrt{n})$  این را انجام دهیم.