

باسمه تعالی
هفدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر
امتحان نظری اصلی پنجم

چهارشنبه ۳۱ مرداد ۱۳۸۶

وقت: ۵ ساعت

زادی‌مقدم، احمدی‌پور

مسئله‌ی اول: زیرگراف‌های پوشاننده ۳۰ نمره

G ، گرافی n رأسی با یال‌های e_1, e_2, \dots, e_m است. می‌خواهیم تعدادی زیرگراف دوبخشی کامل فراگیر از G پیدا کنیم که هر یال e_i حداقل در یکی از این زیرگراف‌ها آمده باشد. الگوریتمی چندجمله‌ای ارائه دهید که بگوید آیا می‌توان این کار را انجام داد یا نه، و اگر می‌توان حداقل چند زیرگراف لازم است؟

مسئله‌ی دوم: گراف آزاد؛ زیرگراف پُریال ۳۰ نمره

گراف $k_{1,3}$ -آزاد n رأسی G داده شده است که $\Delta_G = n - 1$. می‌خواهیم r تا 2 از رئوس G را انتخاب کنیم به‌طوری که زیرگراف القایی حاصل از این r رأس بیش‌ترین تعداد یال ممکن را داشته باشد. فرض کنید در بین تمام $\binom{n}{r}$ راه ممکن برای این انتخاب، زیرگراف القایی حاصل از زیرمجموعه‌ی r عضوی S از رئوس G ، بیش‌ترین تعداد یال ممکن یعنی T یال داشته باشد. الگوریتمی چندجمله‌ای بدهید که یک مجموعه‌ی r -عضوی از رئوس (مانند S') بیابد که زیرگراف القایی حاصل از رئوس S' حداقل $\lfloor \frac{T}{4} \rfloor$ تا یال داشته باشد.

مسئله‌ی سوم: ماتریس جادویی ۴۰ نمره

ماتریسی $n \times n$ از اعداد حقیقی با درایه‌های a_{ij} داده شده است. می‌خواهیم n عدد حقیقی x_1, x_2, \dots, x_n را پیدا کنیم که در نامساوی زیر صدق کنند:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} |x_i - x_j| > 0$$

الگوریتمی با زمان اجرای $O(2^n n^3)$ ارائه دهید که بگوید آیا چنین n عددی وجود دارند یا نه، و در صورت وجود یکی از حالت‌های ممکن برای این n عدد را مشخص کند.

نیک دوسانتوس پست‌چی، سید نامه‌های بدون آدرس را بررسی کرد.
روی صدها پاکت نوشته شده بود: «بابانول، قطب جنوب»
نیک به رئیس خود گفت: «از دیدن ناامیدی بچه‌ها بیزارم»
مرد پاسخ داد: «اعتقاد به بابانول به‌دردشان می‌خورد»
نیک وقتی به خانه رسید دست در کیفش کرد
و یکی از آن همه نامه را بیرون آورد.
نیک نوشت: «بابی عزیز»

[دین کرپستین سن، داستان‌های ۵۵ کلمه‌ای]

^۱ یک گراف $k_{1,3}$ -آزاد است اگر و فقط اگر هیچ زیرگراف القایی 4 رأسی از آن هم‌ریخت با $k_{1,3}$ نباشد.
^۲ عدد r در ورودی داده می‌شود