

باسمه تعالی  
هفدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر  
امتحان نظری اصلی سوم

چهارشنبه ۱۷ مرداد ۱۳۸۶

نیکزاد، زادی مقدم وقت: ۵ ساعت

مسئله‌ی اول: لیاقت هپید ..... ۳۰ نمره

«هپید» در جشن تولد خود  $n$  تا «بازه» هدیه گرفته است! نقطه‌ی شروع هر بازه،  $a_i$  و نقطه پایان آن  $b_i$  ( $a_i < b_i$ ) است. هپید می‌داند که هیچ  $i$  و  $j$  متفاوتی وجود ندارند به طوری که  $a_i \leq a_j$  و  $b_i \geq b_j$ . او می‌خواهد این  $n$  بازه را با  $x$  رنگ، رنگ‌آمیزی کند به طوری که هیچ سه بازه متفاوت  $i$  و  $j$  و  $k$  وجود نداشته باشند که

هر سه‌شان هم‌رنگ باشند، و بازه  $i$  با بازه  $j$  اشتراک داشته باشد، بازه  $j$  با بازه  $k$  اشتراک داشته باشد، ولی بازه  $i$  با بازه  $k$  اشتراک نداشته باشد.

می‌دانیم دو بازه با هم اشتراک دارند اگر و فقط اگر در بیش از یک نقطه مشترک باشند. هپید دلش می‌خواست کمترین مقدار  $x$  را پیدا کند؛ ولی از آن‌جا که مغزش خیلی خیلی کوچک است، نتوانست این کار را انجام دهد و گریه‌اش گرفت. از آن‌جا که هپید لیاقت این خوش‌حالی را دارد، به او کمک کنید و الگوریتمی چندجمله‌ای ارائه کنید که کمترین مقدار  $x$  را بیابد و بازه‌ها را با  $x$  رنگ، رنگ‌آمیزی کند.

مسئله‌ی دوم: مسیر کم تنوع ..... ۳۰ نمره

یال‌های یک گراف با تعدادی رنگ، رنگ‌آمیزی شده‌اند. «عدد تنوع» برای یک مسیر، تعداد رنگ‌های موجود در یال‌های آن مسیر است. تعداد بخش‌های یک رنگ مانند  $c$  به این صورت به دست می‌آید که صرفاً یال‌های به رنگ  $c$  را در گراف در نظر می‌گیریم و تعداد مؤلفه‌هایی از این گراف حاصل را که حداقل یک یال دارند، تعداد بخش‌های این رنگ می‌نامیم. برای حل قسمت ب می‌توانید قسمت الف را درست فرض کنید.

الف) [۵ نمره] الگوریتمی چندجمله‌ای ارائه کنید که اگر در گراف ما تعداد بخش‌های هر رنگ یک باشد، مسیر با عدد تنوع کمینه را بین دو رأس داده‌شده  $u$  و  $v$  پیدا کند.

ب) [۲۵ نمره] الگوریتمی چندجمله‌ای ارائه کنید که مسیری با عدد تنوع حداکثر  $\sqrt{n} + t \times \sqrt{n}$  بین دو رأس داده‌شده  $u$  و  $v$  پیدا کند. در این رابطه،  $t$  عدد تنوع مسیر با کمترین عدد تنوع بین  $u$  و  $v$  است.

مسئله‌ی سوم: زبان پیشوند-آزاد ..... ۴۰ نمره

یک زبان یک مجموعه (ی چندگانه) از رشته‌های دودویی (صفر و یک) می‌باشد. یعنی ممکن است یک رشته بیش از یک بار در زبان آمده باشد. یک رشته پیشوند یک رشته‌ی دیگر است اگر و فقط اگر دقیقاً در ابتدای آن رشته ظاهر شده باشد. مثلاً رشته‌ی ۰۰۱۱ پیشوند رشته‌ی ۰۰۱۱۰۱ است. یک زبان، پیشوند-آزاد است اگر و فقط اگر هیچ عضو آن، پیشوند دیگری نباشد.

یک زبان داریم و در هر مرحله می‌توانیم یکی از اعضای آن را به رشته‌ی دیگری تغییر دهیم به شرطی که تعداد صفرهای رشته‌ی جدید، با تعداد صفرهای رشته‌ی قبلی برابر باشد و تعداد یک‌های رشته‌ی جدید نیز با تعداد یک‌های رشته‌ی قبلی برابر باشد.

الگوریتمی چندجمله‌ای ارائه کنید که بگوید آیا با تکرار این عمل، می‌توانیم این زبان را به یک زبان پیشوند-آزاد تبدیل کنیم یا نه.

سحر با باد می‌گفتم، حدیث آرزومندی  
خطاب آمد که واثق شو، به الطاف خداوندی