

باسمه تعالی
هفدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر
امتحان نهایی نظری اول

یک‌شنبه ۱۱ شهریور ۱۳۸۶

وقت: ۵ ساعت

احمدی‌پور، محرابیان، زادی‌مقدم

مسئله‌ی اول: نقطه‌های مربع‌ساز ۲۵ نمره
 n نقطه متمایز با مختصات حقیقی در صفحه‌ی x, y داده شده‌اند. ثابت کنید تعداد مربع‌های منتهی^۱ که رئوس آن‌ها از بین این نقاط هستند $O(n\sqrt{n})$ است.

مسئله‌ی دوم: رشته‌های گراف‌ساز ۳۵ نمره
 n رشته‌ی دودویی متمایز به طول l داریم ($n, l > 0$). گراف G را از روی این رشته‌ها بدین ترتیب می‌سازیم:
به ازای هر رشته یک رأس قرار می‌دهیم، و دو رأس را به هم وصل می‌کنیم اگر و تنها اگر طول «بزرگ‌ترین پیشوند مشترک» رشته‌های متناظر آن‌ها عددی زوج باشد.

به عنوان مثال رئوس متناظر رشته‌های ۱۱۰۱۱۰۰ و ۱۱۰۱۰۰۱ را به هم وصل می‌کنیم زیرا بزرگ‌ترین پیشوند مشترکشان ۱۱۰۱ است، ولی رئوس متناظر رشته‌های ۱۰۱۰۰۱ و ۰۱۰۰۱۱۱ را به هم وصل نمی‌کنیم زیرا بزرگ‌ترین پیشوند مشترکشان ۰۱۰ است. همچنین رئوس متناظر دو رشته‌ی ۰۱۰۰۱۱۱ و ۱۰۰۰۱۱۱ را نیز به هم وصل می‌کنیم زیرا طول بزرگ‌ترین پیشوند مشترکشان صفر است.
فرض کنید در گراف G حاصل، بزرگ‌ترین زیرگراف کامل، k رأسی باشد و عدد استقلال^۲ آن e باشد. ثابت کنید $e \times k \geq n$.

مسئله‌ی سوم: سه رنگ‌آمیزی زیبا ساز ۴۰ نمره
الگوریتمی ارائه کنید که از ورودی یک گراف سه‌رنگ‌پذیر را دریافت کند و در زمان $O(3^{n/3} \times n^1)$ یک رنگ‌آمیزی معتبر^۳ از رئوس این گراف را با سه رنگ بدهد.
(نکته: n^1 صرفاً برای راحتی بیشتر شما در حل این سؤال داده شده است.)

شاگردان کلاس اول مدرسه‌ی ما زنگ‌های تفریح در علفزار
مسابقه دو می‌دادند. «کیم» با لب‌خند زیبا و موهای دم اسبی
طلایی رنگش و من، از همه بچه‌ها سریع‌تر می‌دویدیم.
یک‌بار در حیاط خانه‌ی او، با هم مسابقه دادیم. یادم نیست
کدام یک از ما برنده شدیم.
کیم چند سال بعد، بر اثر یک بیماری که نمی‌توانستم نامش را
تلفظ کنم، مرد.
من، هنوز همراه کیم می‌دوم.

[رابطه ام. دومینگز، داستان‌های ۵۵ کلمه‌ای]

^۱ مربع منتهن مربعی است که اضلاع آن موازی محورهای x, y باشند
^۲ اندازه‌ی بزرگترین مجموعه مستقل رأسی
^۳ در یک رنگ‌آمیزی معتبر، هیچ دو رأس مجاوری هم‌رنگ نیستند