

باسمه تعالی  
هجدهمین دوره ی المپیاد کامپیوتر  
آزمون پایانی نظری دوم  
چهارشنبه ۶ شهریور ۱۳۸۷

وقت: ۵ ساعت

زادی مقدم، نیکزاد

مسئله ی اول: همبندی ..... ۳۰ نمره

دنباله ی درجات یک گراف  $n$ -رأسی  $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$  است (نه لزوماً صعودی یا نزولی) و برای هر  $1 \leq i < n$  داریم:

$$\text{Max}(d_i, i - 1) + d_{i+1} \geq n - 1$$

ثابت کنید که این گراف همبند است.

مسئله ی دوم: سرویس دهی ..... ۳۰ نمره

الف) روی بعضی از رئوس گراف ساده ی  $G$  فروشگاه هایی قرار دارد. در هر فروشگاه تعدادی بستنی وجود دارد. تعداد بستنی ها در فروشگاه های مختلف لزوماً یکی نیست. تعدادی کودک نیز روی تعدادی از رئوس (نه لزوماً متمایز) گراف قرار دارند. می خواهیم کودکان را روی رئوس گراف طوری حرکت دهیم که به هر کودک یک بستنی برسد (می دانیم این کار همواره امکان پذیر است و لزومی ندارد همه ی بستنی ها تمام شوند). با دانستن این نکته که هر کودک هر یال را در یک دقیقه طی می کند، یک الگوریتم چندجمله ای ارائه کنید تا کودکان را طوری حرکت بدهد که آخرین کودکی که به بستنی می رسد تا حد ممکن در زمان کوتاه تری برسد. (۲۵ نمره)

ب) اگر در حالت قبل فروشگاه ها هم بتوانند حرکت کنند (مانند چرخ دستی سیارا) و سرعتشان مانند کودکان باشد، نشان دهید که جواب مسئله کمتر از نصف نخواهد شد. (۵ نمره)

مسئله ی سوم: پُر یال ..... ۴۰ نمره

اندازه ی بزرگترین مجموعه ی مستقل راسی در گراف ساده ی  $G$  کوچکتر از  $\sqrt{n}$  است. ثابت کنید تعداد یال های  $G$  از  $\Omega(n\sqrt{n})$  است.

«استوار باشید!»