

باسمه تعالی
هجدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر
آزمون پایانی نظری اول

دوشنبه ۴ شهریور ۱۳۸۷

وقت: ۵ ساعت

زادی‌مقدم

مسئله‌ی اول: دنباله‌ی باینری ۲۵ نمره

یک دنباله‌ی n -تایی صفر و یک داریم. در هر مرحله می‌توانیم یک زیردنباله‌ی متوالی^۱ از این دنباله را انتخاب کنیم و بررسی کنیم که «آیا تعداد یک‌ها در این زیردنباله‌ی متوالی از تعداد صفرها بیشتر هست یا خیر؟»
کمترین تعداد پرسش مورد نیاز برای فهمیدن کل این دنباله بر حسب n چند است؟ ادعای خود را اثبات کنید.

مسئله‌ی دوم: زیرگراف k -رأسی ۳۵ نمره

گراف G با n رأس (با شماره‌ی رئوس ۱ تا n) داده شده است. تعداد یال‌های همه‌ی $\binom{n}{k}$ زیرگراف k -رأسی G را نیز داریم. به ازای چه مقادیری از k می‌توان گراف G را به‌طور کامل تشخیص داد؟
دقت کنید که گراف G هرچه باشد باید بتوان آن را به‌طور یکتا تعیین کرد.

مسئله‌ی سوم: تبدیل عدد ۴۰ نمره

می‌خواهیم از عدد ۱ به عدد n برسیم. در هر مرحله می‌توانیم یا عددمان را دو برابر کنیم یا به آن یک واحد اضافه کنیم. هزینه‌ی هر کدام از این دو عمل نیز ۱ است.
به ازای هر عدد $1 \leq x \leq n$ یک زیرمجموعه‌ی A_x از اعداد $1, 2, \dots, x-1$ و یک عدد $0 \leq c_x \leq 10$ نیز به ما داده‌اند که اگر در طول مراحل عدد x تولید شد و قبل از تولید x نیز حداقل یکی از اعضای A_x تولید شده بود ما باید هزینه‌ی اضافی c_x را بپردازیم. دقت کنید که به‌ازای هر x ، ما هزینه‌ی c_x را حداکثر یک‌بار می‌پردازیم.
الگوریتمی چندجمله‌ای بر حسب n ارائه کنید تا با پرداخت کم‌ترین هزینه، با شروع از عدد ۱، عدد n را تولید کند.

«پیروز باشید!»

^۱ که شامل تعدادی عنصر پشت‌سرهم از دنباله‌ی اصلی است