

باسمه تعالی  
دوره‌ی آموزشی المپیاد کامپیوتر  
امتحان نظری آزمایشی اول

پنج‌شنبه ۱۵ تیرماه ۱۳۸۵

سیدی، زادی مقدم، نوروزی، نصیری شرق وقت: ۴/۵ ساعت

مسئله‌ی اول: زود، تند، سریع! ..... ۲۰ نمره

الف) (۱۰ نمره) تعداد گراف‌های هم‌بند ۱۳۸۵ رأسی بیش‌تر است یا تعداد گراف‌های ناهم‌بند ۱۳۸۵ رأسی؟ چرا؟

ب) (۱۰ نمره) تعداد گراف‌های ۷ رأسی ۴-منتظم چندتاست؟ گراف‌های هم‌ریخت<sup>۱</sup> را یک واحد بشمارید.

مسئله‌ی دوم: پلیس‌های نیمه‌حرفه‌ای ..... ۳۰ نمره

یک قاتل نیمه‌حرفه‌ای که به تازگی از زندان فرار کرده است، زیریکی از رأس‌های یک گراف  $n$  رأسی که از قضا درخت هم هست قایم شده است! بالطبع تعدادی پلیس هم در پی یافتن قاتل، وارد گراف شده‌اند. می‌دانیم قاتل در ابتدا زیریکی از رؤوس مخفی شده است؛ اما با گذشت زمان، ممکن است صرفاً از روی یال‌ها، اقدام به تعویض محل اختفای خود کند. پلیس‌ها هم، با اطلاع از این موضوع و صرفاً از روی یال‌ها، به دنبال قاتل می‌گردند. هم‌چنین می‌دانیم اگر قاتل و حداقل یکی از پلیس‌ها در یک زمان، در یک رأس یا یک یال باشند، قاتل به دام می‌افتد. دقت کنید که سرعت جابه‌جایی قاتل ممکن است بیش‌تر از سرعت حرکت پلیس‌ها باشد. ثابت کنید  $[lg n]$  پلیس می‌توانند طوری رؤوس را بررسی کنند که قاتل حتماً دست‌گیر شود.

مسئله‌ی سوم: م.ک.ب.د.پ و گاو صندوق ش ..... ۵۰ نمره

کتاب‌خانه‌ی «باشگاه دانش‌پژوهان پیر» یک مسئول دارد!

مسئول کتاب‌خانه‌ی «باشگاه دانش‌پژوهان پیر»، خودش هم پیر است!

کتاب‌خانه‌ی باشگاه دانش‌پژوهان پیر در طبقه‌ی دوم ساختمان واقع است؛ اما انبار کتاب‌ها در زیرزمین ب.د.پ.<sup>۲</sup> قرار گرفته است!

سال‌ها پیش، وقتی م.ک.ب.د.پ.<sup>۳</sup> جوان بود، هر زمان که یکی از دانش‌پژوهان پیر<sup>۴</sup> به او مراجعه می‌کرد و از وی درخواست کتاب می‌کرد، او سریعاً به انبار کتاب می‌رفت و کتاب موردنظر را برمی‌داشت و برای آن دانش‌پژوه می‌آورد. دانش‌پژوه هم پس از مطالعه‌ی کتاب در کتاب‌خانه، کتاب را همان‌جا به م.ک.ب.د.پ. پس می‌داد و از ک.ب.د.پ. بیرون می‌رفت تا نفر بعدی بیاید و ... البته هنگامی که م.ک.ب.د.پ. برای آوردن کتاب به انبار می‌رفت، در صورتی که کتابی (از دانش‌پژوه قبلی، در صورت وجود) باقی مانده بود، آن را با خود به انبار می‌برد و در قفسه‌ی مربوطه قرار می‌داد. به

۱ Isomorphist  
۲ باشگاه دانش‌پژوهان پیر  
۳ مسئول کتاب‌خانه‌ی ب.د.پ.  
۴ جوان سابق

این ترتیب در هر لحظه حداکثر یک کتاب خارج از انبار (نزد م.ک.ب.د.پ و یا در کتابخانه) بود. همچنین چون در کتابخانه برای حداکثر یک نفر (به جز م.ک.ب.د.پ) جا بود، دانش پژوهان مجبور بودند پشت در کتابخانه صف ببندند و منتظر بمانند تا نوبتشان بشود و پس از سفارش دادن کتاب و دریافت آن، کتابشان را بخوانند و بروند پی کارشان!

اکنون، پس از گذشت سال‌ها م.ک.ب.د.پ کم‌انرژی‌تر شده است ولی تجربه‌ی سالیان دراز به وی کمک کرده است تا نقشه‌ی مناسبی برای کم کردن میزان تردد به انبار بکشد: استفاده از «گاو صندوق»!

از آن‌جا م.ک.ب.د.پ به تجربه دریافت که دانش پژوهان پیر (از وقتی پا به سن گذاشته‌اند)، تنها تعداد معدودی از کتاب‌ها را مطالعه می‌کنند، تصمیم گرفته‌است تا با خرید یک گاو صندوق (که نقش یک انبار بسیار کوچک را در داخل کتابخانه دارد)، کتاب‌هایی را که اخیراً مورد استفاده قرار گرفته‌اند، در آن نگه دارد تا مجبور نشود به‌ازای هر کتاب یک بار به انبار برود!

روش کار م.ک.ب.د.پ بدین نحو است که در ابتدای کار (صبح زود) گاو صندوق وی خالی است. سپس هر بار که یک دانش پژوه یک کتاب سفارش می‌دهد، او ابتدا به گاو صندوق نگاه می‌کند. اگر کتاب خواسته شده، در گاو صندوق بود که همان‌جا کتاب را به دانش پژوه می‌دهد تا بخواند و پس از پایان کار، در همان محلّ اَوّلیّه (در گاو صندوق) قرار می‌دهد. اما در صورتی که آن کتاب در گاو صندوق نباشد، م.ک.ب.د.پ مجبور است کتاب را از انبار بیاورد. برای این منظور، اگر گاو صندوق پر باشد، م.ک.ب.د.پ کتابی که قبل‌تر از سایر کتاب‌ها از انبار خارج را بر می‌دارد، آن را به انبار برده و سر جای خود قرار می‌دهد و کتاب خواسته شده را به کتابخانه می‌آورد. در صورتی که گاو صندوق قبل از رفتن به انبار پر نباشد، م.ک.ب.د.پ چیزی را با خود به انبار نمی‌برد. بدیهی‌ست که با این کار اگر ظرفیت گاو صندوق،  $n$  کتاب باشد، همواره حداکثر  $n$  کتاب خارج از انبار خواهند بود و اگر در یک لحظه گاو صندوق پر شود، از آن به بعد (هر زمان که م.ک.ب.د.پ در کتابخانه باشد) همواره گاو صندوق پر است.

به عنوان مثال اگر  $n = 4$  و شماره‌ی کتاب‌های درخواستی دانش پژوهان پیر به ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۴، ۱ و ۳ باشد، م.ک.ب.د.پ باید دقیقاً ۶ بار (به ترتیب برای کتاب‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و مجدداً ۱) به انبار برود؛ زیرا هنگامی که دانش پژوه ششم کتاب ۴ را درخواست می‌کند، آن کتاب در گاو صندوق موجود است و لازم نیست م.ک.ب.د.پ به انبار برود. ایضاً هنگامی که دانش پژوه هشتم کتاب ۳ را درخواست می‌کند. بدیهی‌ست که اگر دانش پژوه بعدی که می‌آید، کتابی را درخواست کند که در گاو صندوق نباشد (مثلاً کتاب ۶)، م.ک.ب.د.پ کتاب ۳ را (که در آن زمان، نسبت به سایر کتاب‌های موجود در قفسه، بیش‌تر از همه از انبار دور بوده است!) به انبار برده و کتاب درخواستی را به کتابخانه می‌آورد تا (پس از مطالعه‌ی دانش پژوهی که آن کتاب را خواسته) در گاو صندوق، به ترتیب عکس اولویت زمان ورود، کتاب‌های ۴، ۵، ۱ و ۶ قرار گرفته باشند.

روزی از روزها، م.ک.ب.د.پ با خود فکر کرد که اگر گاو صندوقی با ظرفیت بیش‌تر تهیه کند، تعداد دفعاتی که لازم است به انبار برود، کمتر شده و یا حداکثر همان تعداد می‌ماند. او این فکر را با ی.ا.د.ا.ک<sup>۵</sup> در میان گذاشت، اما با کمال ناباوری ی.ا.د.ا.ک به او گفت که افزایش ظرفیت گاو صندوق حتی ممکن است باعث شود که او تعداد دفعات بیش‌تری به انبار برود!

اکنون، اگر  $g(S, n)$  را برابر تعداد دفعاتی که م.ک.ب.د.پ، با داشتن گاو صندوقی با ظرفیت  $n$ ، برای فراهم کردن دنباله‌ی  $S$  از کتاب‌ها باید به انبار برود، تعریف کنیم؛ و با فرض این که کتاب‌های م.ک.ب.د.پ از شماره‌ی یک (تا

<sup>۵</sup> یکی از دانش پژوهان المپیاد کامپیوتر

بی‌نهایت) شماره‌گذاری شده‌اند ...

الف) (۱۰ نمره) برای  $n = 3$ ، یک دنباله‌ی  $S$  مثال بزنید که

$$g(S, 4) > g(S, 3)$$

ب) (۲۰ نمره) نشان دهید که برای هر  $n$  دلخواه، یک دنباله‌ی  $S$  وجود دارد که

$$\forall_{n < m \leq 2n-2} : g(S, m) > g(S, n)$$

ج) (۲۰ نمره) نشان دهید برای  $m > 2n - 2$ ، هیچ دنباله‌ی  $S$  وجود ندارد که

$$g(S, m) > g(S, n)$$

آه،

ای که تن فرسودی و هرگز نیاسودی  
هیچ آیا یک قدم، دیگر توانی راند؟  
هیچ آیا یک نفس دیگر توانی ماند؟  
نیمه‌راهی طی شد اما نیمه جانی هست  
باز باید رفت تا در تن توانی هست  
باز باید رفت ...  
راه باریک و افق تاریک،  
دور یا نزدیک!