

به نام خدا  
شانزدهمین دوره‌ی آموزشی المپیاد کامپیوتر  
امتحان نهایی درس ترکیبیات

دوشنبه ۶ شهریور ۱۳۸۵

وقت: ۳ ساعت

محرابیان، زادی مقدم

مسئله‌ی اول:  $R(k, k)$  ..... ۱۵ نمره

الف) اگر  $1 < \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$  ثابت کنید  $R(k, k) > n$  (۵ نمره)

ب) اگر  $n < \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$  ثابت کنید  $R(k, k) > n - \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$  (۱۰ نمره)

اگر نمی‌دانید  $R(k, k)$  چیست و برای اثبات این دو نامساوی باید چه چیزی را نشان دهید، معنای آن‌ها در ازای کسر مقداری از نمره‌ی سؤال به شما گفته خواهد شد.

مسئله‌ی دوم: **رئوس مستقل** ..... ۱۵ نمره

این مسئله را فقط با روش احتمالاتی حل کنید.

یک گراف ساده‌ی  $n$  رأسی با مجموعه رئوس  $V$  داریم که در آن درجه‌ی رأس  $u$  را با  $d(u)$  نشان

می‌دهیم. ثابت کنید می‌توان  $\sum_{u \in V} \frac{1}{d(u)+1}$  تا از رئوس این گراف را انتخاب کرد، به طوری که هیچ

دو رأس انتخاب شده‌ای به هم وصل نباشند.

راهنمایی: ابتدا رئوس را به صورت تصادفی از ۱ تا  $n$  شماره‌گذاری کنید.

مسئله‌ی سوم: **انقباض‌های تصادفی** ..... ۱۵ نمره

الگوریتم تصادفی زیر روی یک گراف ساده انجام می‌شود:

در هر مرحله، اگر گرافمان تک‌راسی بود الگوریتم به پایان می‌رسد. وگرنه دو راس تصادفی از گراف

انتخاب می‌شوند؛ اگر به هم متصل بودند یال بینشان منقبض می‌شود و این دو راس یکی می‌شوند،

اگر متصل نبودند کاری انجام نمی‌دهیم.

برای هر گراف اولیه‌ی  $n$ -راسی همبند، با فرض این که الگوریتم پایان پذیرفته، ثابت کنید امید ریاضی تعداد

مراحل الگوریتم حداکثر  $\frac{n(n+1)}{4}$  می‌باشد.

موفق باشید!