

به نام خدا

دوره‌ی آموزشی المپیاد کامپیوتر

کوئیز اول نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

کیان میرجلالی

یکشنبه ۲۵ تیر ۱۳۸۵

وقت: ۱ ساعت

(۱) یک هتل بینهایت طبقه (طبقه‌ی ۱، ۲، ۳، ...) داریم که در هر طبقه‌ی آن یک مسافر زندگی می‌کند. به نظر می‌رسد ظرفیت چنین هتلی تکمیل است و نمی‌توان مسافر جدیدی را به آن وارد کرد. ولی مدیر هتل به کار خود وارد است. مثلاً با ورود یک مسافر جدید به همه‌ی ساکنین هتل می‌گوید یک طبقه به بالا بروند و به مسافر جدید می‌گوید به طبقه‌ی ۱ بروند. به طریق مشابه مدیر هتل را در دو وضعیت زیر راهنمایی کنید:

- (a) هتلی با وضعیت دقیقاً مشابه، خراب شده و همه‌ی مسافران آواره‌ی آن خواستار ورود به این هتل‌اند.
(b) بینهایت هتل (مثلاً با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ...) با وضعیت دقیقاً مشابه، خراب شده‌اند و همه‌ی مسافران آواره‌ی همه‌ی آن‌ها خواستار ورود به این هتل‌اند.

(۲) (a) نشان دهید $|R| = |R - N|$.

(b) با فرض شمارا بودن حالت‌های دوگانه‌ی نمایش اعداد (مثل $0.0\bar{9} = 0.1\bar{0}$)، ثابت کنید $|R^2| = |R|$.

(۳) توصیف یک ماشین بیان ریاضی و فرمال آن است به گونه‌ای که از روی توصیف بتوان آن ماشین را ساخت. مثلاً کد یک برنامه‌ی C یا رشته‌ی زیر که توصیف یک DFA است:
 $DFA: states = \{q_0, q_1\}, initial-state = q_0, final-states = \{q_1\}, rules = \{(q_0, a, q_1), (q_0, b, q_0), (q_1, a, q_0), (q_1, b, q_1)\}$
در این مسئله فرض کنید الفبای زبان‌ها و ورودی ماشین‌ها Σ و الفبای توصیف خود ماشین‌ها Γ می‌باشد.

(a) نشان دهید $|\Gamma^*| = |N|$ و با فرض متناهی بودن توصیف همه‌ی ماشین‌ها^۱ نتیجه بگیرید مجموعه‌ی همه‌ی ماشین‌ها شماراست.

(b) ثابت کنید $|2^N| \neq |N|$.

(c) به کمک بندهای قبل نشان دهید همیشه زبانی وجود دارد که پذیرنده‌ای برای آن نمی‌توان ساخت. به بیان دیگر، همیشه مسئله‌ای وجود دارد که نمی‌توان حل‌ای برای آن ارائه داد.

(۴) مشکل روش قطری‌سازی برای اثبات $|N| \neq |Q|$ چیست؟ به عبارت دیگر، چرا نمی‌توان از همان استدلالی که برای اثبات $|N| \neq |R|$ به کار برده شد، برای اثبات $|N| \neq |Q|$ استفاده کرد؟

^۱ دقت شود که یک ماشین با حافظه‌ی نامتناهی نیز می‌تواند توصیفی متناهی داشته باشد، مثلاً برنامه‌های C (حتی با فرض حافظه‌ی نامتناهی)، یا ماشین‌های تورینگ، یا PDAها.