

## دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

### آزمون نظری اول

وقت: ۵ ساعت

پنج شنبه ۱۵ تیر ۱۳۹۱

#### مسئله اول. ماتریس مزه‌ها ..... ۳۰ امتیاز

تعریف: به ماتریس  $n \times n$  همانند  $A$  بامزه می‌گوییم هرگاه تمام درایه‌های آن  $+1$  و یا  $-1$  باشند و به ازای هر دو سطر مثل  $i, j$  داشته باشیم:

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} \times a_{j,k} = 0$$

تعریف: به ماتریس  $n \times n$  همانند  $A$  خوشمزه می‌گوییم، هرگاه بامزه باشد و به ازای  $1 \leq i \leq n$  داشته باشیم:

$$a_{i,1} = a_{1,i} = +1$$

(الف) ثابت کنید اگر ماتریس  $n \times n$  بامزه وجود داشته باشد، ماتریس  $n \times n$  خوشمزه نیز وجود دارد. (۵ امتیاز)  
(ب)  $n$  دنباله به نام‌های  $A_1, \dots, A_n$  داریم که طول هر کدام  $n-1$  بوده و اعضای هر کدام از آنها  $+1$  و یا  $-1$  است. ضرب داخلی دو بردار برابر مجموع حاصلضرب درایه‌های متناظر آنها در یکدیگر است. در صورتی که ضرب داخلی هر دو بردار از این  $n$  تا منفی شود، به این  $n$  تایی تلخ می‌گویند.

ثابت کنید  $n$  تایی تلخ وجود دارد اگر و فقط اگر، ماتریس بامزه  $n \times n$  وجود داشته باشد. (۲۵ امتیاز)

#### مسئله دوم. پاک کردن یک‌ها ..... ۳۰ امتیاز

همه‌ی جدول‌های  $n \times n$  با درایه‌های صفر و یک را در نظر بگیرید که دقیقاً  $n$  تا از درایه‌های آنها یک است. برای هر کدام از این جدول‌ها با کمترین تعداد استفاده از عمل‌های زیر یک‌ها را پاک می‌کنیم و تعداد این اعمال را یادداشت می‌کنیم و  $f(n)$  را ماکسیمم این اعداد تعریف می‌کنیم.  $\Theta(f(n))$  را بر حسب  $n$  محاسبه کنید. اعمال مجاز:

۱. پاک کردن تعدادی یک که در یک سطر قرار دارند.
۲. پاک کردن تعدادی یک که در یک ستون قرار دارند.
۳. پاک کردن تعدادی یک که هیچ دوتایی از آنها در یک سطر یا ستون قرار ندارند.

#### مسئله سوم. گراف خوب ..... ۴۰ امتیاز

گراف ساده  $G$  را در نظر بگیرید که ماتریس مجاورت آن  $A$  است.  $G$  را خوب می‌نامیم اگر و تنها اگر عددی طبیعی مانند  $k$  موجود باشد که  $A^k$  ماتریسی باشد که همه‌ی درایه‌هایش ناصفر است. (راهنمایی: به ارتباط درایه‌های  $A^k$  با گشت‌های به طول  $k$  در گراف توجه کنید.)

الف) شرط لازم و کافی برای خوب بودن یک گراف معرفی کنید و ادعای خود را ثابت کنید. (۲۵ امتیاز)  
ب) ثابت کنید اگر  $G$  گراف  $n$  راسی و خوب باشد، عدد طبیعی  $k < 2n$  وجود دارد که همه درایه‌های  $A^k$  ناصفر باشند. (۱۵ امتیاز)