

باسمه تعالی
هفدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر
آزمون میان‌ترم درس الگوریتم

پنج‌شنبه ۴ مرداد ۱۳۸۶

نصیری شرق، زادی‌مقدم، نیک‌زاد

وقت: ۲/۵ ساعت

مسئله‌ی اول: نرخ بنزین آزاد! ۲۰ نمره

در شهر تهران، میدان عجیبی به نام میدان «باصفا» وجود دارد که دور آن n خانه وجود دارد. هر خانه یک بالکن دارد و در هر خانه دقیقاً یک نفر زندگی می‌کند. هر نفر هر روز در یک ساعت مشخص به بالکن می‌رود، مدت مشخصی به تماشای میدان می‌ایستد و پس از آن دوباره به اتاق خود بر می‌گردد! متأسفانه اطلاع‌رسانی در این شهر تا اندازه‌ای ضعیف‌ست و هر وقت خبر مهمی می‌شود، «جارجی» مجبورست وسط میدان بایستد و خبر را جار^۱ بزند! منتها مشکل کار این‌جاست که در زمان جار زدن، تنها کسانی خبر را می‌شنوند که در آن لحظه روی بالکن باشند^۲.

یک‌روز صبح دولت وقت تصمیم گرفت نرخ آزاد بنزین را (که از مدتی قبل سهمیه‌بندی شده بود) برابر x ریال اعلام کند. به دلیل مشکلات ناشی از جار زدن (نظیر آلودگی صوتی و غیره)، دولت تصمیم می‌گیرد که جارجی تنها یک‌بار و آن‌هم رأس ساعت ۹ صبح^۳، در میدان شهر جار بزند که «بنزین آزاد لیتری x ریال شده» تا افرادی که در آن زمان روی بالکن هستند، از این مهم آگاهی پیدا کنند. دولت اقدام به فرهنگ‌سازی کرده و به هر کدام اهالی میدان باصفا آموزش داده که اگر زمانی شما روی بالکن بودید و خبر نرخ بنزین آزاد را می‌دانستید و یکی دیگر از اهالی روی بالکن آمد، نرخ بنزین را به او بگویید. با این تدبیر و دانستن این موضوع که در هر لحظه حداقل یک نفر از اهالی روی بالکن است، دولت تصمیم می‌کند که در پایان روز همه‌ی اهالی، نرخ آزاد بنزین را بدانند.

منتها مشکل کار در غربزه‌ی «شایعه پراکنی» اهالی میدان باصفاست! این افراد به‌طور غربیزی و غیرارادی وقتی قیمت بنزین را x ریال می‌شنوند، قیمت بنزین را به نفرات بعدی (کسانی که بعداً به بالکن می‌آید)، $2x$ ریال اعلام می‌کنند! از سوی دیگر، به دلیل این‌که خود این افراد از این حس مطلع‌اند، هر کس اگر در لحظه‌ی آمدنش به بالکن چند نرخ بشنود، نرخ کمتر را باور می‌کند.

با این وصف، به دولت کمک کنید و الگوریتمی از زمان $O(n^2)$ ارائه کنید تا با دانستن زمان ابتدا و زمان انتهای روی بالکن بودن هر یک از افراد^۴، گران‌ترین نرخ بنزینی که یک نفر باور می‌کند را به‌دست بیاورد. درستی الگوریتم خود را اثبات کنید.

مسئله‌ی دوم: سهمیه: ۶۰۰ لیتر ۲۵ نمره

همان داستان مسئله‌ی قبل را در نظر بگیرید. دولت پس از این‌که فهمید نرخ‌های کاذب به گوش برخی از اهالی رسیده، بسیار ناراحت شد و تصمیم گرفت بی‌خیال آلودگی صوتی شده و تنها از طریق همان جار زدن اقدام به اطلاع‌رسانی کند. در همین راستا، هیچ‌کس هم حق ندارند خبر را به نفر دیگری انتقال بدهند و هر یک از اهالی تنها خبری را باید بپذیرد که از دهان جارجی می‌شنود. این بار خبر این است: «سهمیه بنزین ۶۰۰ لیتر شده است».

برای این منظور، دولت می‌خواهد با دانستن «محدوده‌ی روی بالکن بودن» هر یک از اهالی، به جارجی دستور بدهد تا با کم‌ترین تعداد جار (k) در زمان‌های بهینه‌ی t_1, t_2 تا t_k خبر ثابت ماندن سهمیه را در میدان شهر اعلام کند. به دولت و جارجی کمک کنید و الگوریتمی از $O(n \lg n)$ ارائه کنید تا با دانستن زمانی که هر یک از افراد روی بالکن هستند کم‌ترین تعداد دفعه‌ی لازم برای جار زدن (k) و زمان جارها (t_i ها) را طوری معین کند که هر یک از اهالی حداقل در یکی از این زمان‌ها روی بالکن خانه‌اش باشد. درستی الگوریتم خود را اثبات کنید.

^۱ داد، اطلاع‌رسانی با صدای بلند

^۲ می‌توانید فرض کنید این افراد دقیقاً در لحظه‌ی آمدن به بالکن و بازگشتن به اتاق نیز خبر را می‌شنوند.

^۳ اولین زمان آمدن افراد به بالکن‌شان

^۴ این زمان‌ها لزوماً طبیعی نیستند؛ صرفاً اعداد حقیقی بزرگتر از ۹ (صبح) و کوچک‌تر از ۲۴ (نیمه‌شب) هستند.

مسئله سوم: رابطه بازگشتی ۲۵ نمره

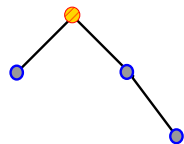
با توجه به تعریف بازگشتی $T(n)$ در زیر، مشخص کنید $T(n)$ از Θ ی چه تابعی می باشد.

$$\begin{cases} T(0) = 1 \\ T(n) = T(n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor) + 1 \quad \Leftarrow n > 0 \end{cases}$$

مسئله چهارم و آخر: خندون ۳۰ نمره

یک درخت ریشه دار n رأسی، درختی n رأسی است که یک رأس آن، به عنوان ریشه مشخص شده است. عمق یک رأس در یک درخت ریشه دار (کوتاه ترین) فاصله ی آن رأس تا ریشه است. یک روز افشین تصمیم می گیرد از روی درخت های ریشه دار n رأسی، رشته هایی به طول $2n - 2$ از صفر و یک بسازد. او برای ساختن یک رشته از روی یک درخت ریشه دار، با یک رشته تهی شروع کرده و به این صورت عمل می کند که ریشه را رنگ کرده و بقیه رئوس را بدون رنگ در نظر می گیرد. سپس از ریشه شروع کرده و در هر مرحله اگر در رأس v بود:

- اگر v حداقل یک همسایه ی رنگ نشده داشت، یکی از همسایه های بی رنگ آن را به دلخواه انتخاب می کند، آن همسایه را رنگ می کند و به آن همسایه ^۵ می رود. (یعنی مرحله ی بعد، الگوریتم از این رأس اجرا می شود) هم چنین به انتهای رشته، عدد ۱ را اضافه می کند.
- اما اگر همه ی همسایه های v رنگ دار بودند، در این صورت اگر v ریشه بود، الگوریتم به پایان می رسد. وگرنه، به پدر v (تنها همسایه ای که عمقش از v یک واحد کم تر است) ^۶ می رود. (یعنی مرحله ی بعد، الگوریتم از این رأس اجرا می شود) هم چنین به انتهای رشته، عدد ۰ را اضافه می کند.



برای مثال یک مسیر به طول سه که یک رأس غیر انتهایی آن به عنوان ریشه انتخاب شده (مطابق شکل)، یک درخت ریشه دار چهار رأسی است که فقط دو رشته 101100 و 110010 از روی آن ساخته می شوند.

صبح امروز افشین دو رشته ی S_1 و S_2 به طول $2n - 2$ از صفر و یک به شما داده و ادعا می کند که این ۲ رشته را از روی دقیقاً یک درخت ساخته است. الگوریتمی از $O(n^2 \lg n)$ بدهید که با گرفتن S_1 و S_2 ، مشخص کند که «آیا درخت ریشه داری وجود دارد که هر دو این رشته ها بتوانند از روی آن ساخته شوند یا نه؟» برای مثال این الگوریتم برای رشته های 110010 و 101100 باید جواب «صحیح» و برای رشته های 110010 و 111000 باید جواب «غلط» را برگرداند.

الگوریتم خود را تحلیل و اثبات کنید.

«موفق باشید!»

^۵ می توان اثبات کرد که این همسایه، الزاماً عمقش یک واحد بیش تر از v است
^۶ در واقع همان رأسی که ازش آمده ایم