

باسمه تعالی
هفدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر
امتحان نظری اصلی اول

پنج‌شنبه ۲۱ تیرماه ۱۳۸۶

نوروزی، نیک‌زاد، میرجلالی وقت: ۵ ساعت

چنان‌چه در این امتحان از قضیه‌ای استفاده می‌کنید که قبلاً در کلاس اثبات نشده، حتماً اثبات آن را بنویسید.

مسئله‌ی اول: جدول‌های جادویی آقای جیم ۳۰ نمره

آقای جیم به یک جدول 14×14 خانه‌ای که یک زیرجدول 3×3 خانه‌ای از آن رنگ شده باشد، یک جدول جادویی می‌گوید. با این تعریف، «جادویی کردن» یک جدول 14×14 کاملاً متمیز یعنی انتخاب یک زیرجدول 3×3 از آن و رنگ کردن آن زیرجدول.

در ابتدا، آقای جیم تعداد بسیار زیادی جدول 14×14 کاملاً متمیز دارد و می‌خواهد تمام جداول جادویی مختلف ممکن را با استفاده از آن‌ها بسازد. او هر روز می‌تواند تعدادی از این جداول‌ها را انتخاب کرده و جادویی کند؛ منتها به‌ازای هر دو جدول A و B که در یک روز جادویی می‌شوند، اگر جدول A را دقیقاً روی جدول B قرار دهیم، باید حتماً حداقل یکی از ۹ خانه‌ی رنگ‌شده‌ی A روی یکی از ۹ خانه‌ی رنگ‌شده‌ی B بیافتد. آقای جیم حداقل چند روز برای ساختن تمام جدول‌های جادویی ممکن لازم دارد؟ چرا؟

مسئله‌ی دوم: دومینوهای بی‌رنگ ۳۵ نمره

یک دومینو، یک مستطیل 1×2 یا 2×1 است که از دو مربع 1×1 به‌هم چسبیده تشکیل شده است. تعدادی دومینو را در یک جدول $n \times m$ خانه‌ای قرار داده‌ایم به‌طوری که هر کدام روی دقیقاً ۲ تا از خانه‌های جدول هستند و هیچ دو دومینویی روی هم نیافتاده‌اند. توجه کنید که دومینوها لزوماً همه‌ی جدول را پر نکرده‌اند! ثابت کنید می‌توان دومینوهای موجود در جدول را طوری با ۴ رنگ، رنگ کرد که هیچ دو دومینوی مجاوری (که در بیش از یک نقطه با هم اشتراک دارند)، هم‌رنگ نباشند.

مسئله‌ی سوم: گراف ثروتمند ۳۵ نمره

در گراف ساده، وزن دار و بی‌جهت G ، هر یال (u, v) ، دارای یک «وزن» است که می‌تواند مثبت، منفی، یا صفر باشد و با $w(u, v)$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین هر رأس u ، یک «عدد علامت» دارد که فقط می‌تواند $+1$ یا -1 باشد و با $p(u)$ نشان داده می‌شود. وزن یال‌ها از قبل تعیین شده است، ولی عدد علامت رأس‌ها را ما می‌توانیم تعیین کنیم. پس از تعیین عدد علامت رأس‌ها، «ارزش» هر یال (u, v) که آن را با $q(u, v)$ نمایش می‌دهیم، به این صورت محاسبه می‌شود:

$$q(u, v) = p(u) \times w(u, v) \times p(v)$$

برای هر رأس u ، «ثروت» آن را با $C(u)$ نشان می‌دهیم که حاصل جمع ارزش یال‌های متصل به آن است یا به عبارت دیگر:

$$C(u) = \sum_{v \in N(u)} q(u, v)$$

ثابت کنید به‌ازای هر گراف اولیه‌ی G ، می‌توان عدد علامت تمام رأس‌ها را طوری تعیین کرد که ثروت هیچ رأسی منفی نشود.

«موفق باشید!»