

به نام او
دوره تابستانی المپیاد کامپیوتر
چهارمین آزمون نظری
چهارشنبه ۲۵ مرداد ۱۳۸۵

زمان: ۵ ساعت

باطنی، زادی مقدم و اوپس قرن

مسئله اول: سنگ ۴۰ نمره

n عنصر در یک مجموعه وجود دارد. هر عنصر یک کلید یکتا و مقداری اطلاعات دارد. دنباله‌ای از درخواستها به طول m به ما داده می‌شود، به طوری که هر درخواست با ارائه کلید، اطلاعات مربوطه را می‌خواهد. برای پاسخگویی به این درخواستها از داده ساختاری به صورت یک لیست پیوندی بهره می‌بریم. الگوریتم ما برای راه اندازی هر درخواست، از ابتدای لیست کار را شروع می‌کند و با پیمایش آن به عنصر مطلوب می‌رسد و سپس بسته اطلاعاتی مربوط به آن را باز می‌گرداند. اگر عنصر درخواستی در i امین جایگاه لیست قرار داشته باشد، این عملیات i واحد هزینه خواهد داشت. پیش از بازگشت از رویه جستجو می‌توان بدون متحمل شدن هزینه اضافی، عنصر یافت شده را، هر مقدار که بخواهیم، به سر لیست نزدیک تر کنیم. از سوی دیگر، هرگاه که اراده کنیم، می‌توان جای دو عنصر متوالی لیست را با یک واحد هزینه جابجا کرد.

الگوریتم «الف» به این شکل عمل می‌کند که پس از یافتن هر عنصر، آن را یک واحد به سر لیست نزدیک می‌کند، به این امید که در ادامه کارایی جستجو را افزایش دهد.

الگوریتمها به دو دسته «برخط» و «برون از خط» تقسیم می‌شوند. دسته اول الگوریتمهایی هستند که درخواستها را یکی یکی دریافت کرده و باید پیش از اطلاع از درخواست بعدی پاسخ را تحویل دهند. اما الگوریتمهای «برون از خط» در ابتدا همه درخواستها را در اختیار دارند و می‌توانند حین اجرا از نحوه درخواستهای بعدی نیز برای تصمیم در مورد تغییر ساختار لیست سود جویند.

الگوریتم «ب» بهترین الگوریتم «برون از خط» است، بدین مفهوم که با داشتن دنباله درخواستها در ابتدا، ساختار لیست را طوری حین عملیات تغییر می‌دهد که در نهایت کمترین هزینه پیش آید.

الگوریتم برخط «پ» را c -رقابتی می‌نامیم، هرگاه ثابت a یافت شود به طوری که به ازای هر دنباله درخواست و هر ساختار اولیه دلخواه برای لیست، هزینه الگوریتم «پ» حداکثر a واحد بیش از c برابر هزینه الگوریتم «ب» باشد. یعنی

$$a + \text{هزینه الگوریتم «ب»} \times c \leq \text{هزینه الگوریتم «پ»}$$

(۱) نشان دهید ثابت c وجود ندارد که الگوریتم «الف» c -رقابتی باشد. (۱۰ نمره)

(۲) اگر الگوریتم برخطی c -رقابتی باشد (که c ثابت است)، اثبات کنید $c \geq 2$ می‌باشد. (۳۰ نمره)

مسئله دوم: کاغذ ۳۰ نمره

دو مسئله زیر را در نظر بگیرید:

الف گراف G و دو رأس s و t از آن داده شده است. تعدادی مهره روی بعضی از رئوس G وجود دارد. می‌خواهیم مهره‌ها را طوری بر روی یالها حرکت دهیم که در پایان، یک مسیر مانند p از s تا t ایجاد شود که هر رأس p دارای دست‌کم یک مهره باشد. هدف این است که طی این عملیات بیشترین میزان حرکت یک مهره کمینه شود. مثلاً اگر یک مهره دو واحد حرکت کند و دیگری سه واحد، کمیتی که می‌خواهیم کمینه کنیم سه می‌باشد.

ب گراف G داده شده است. می‌خواهیم بدانیم که آیا G یک مسیر همیلتونی دارد یا خیر؛ مسیر همیلتونی مسیری n رأسی است، اگر n تعداد رئوس گراف باشد.

ثابت کنید که اگر مسئله «الف» الگوریتمی چندجمله‌ای داشته باشد، مسئله «ب» نیز الگوریتمی چندجمله‌ای خواهد داشت.

مسئله سوم: قیچی ۳۰ نمره

n نقطه در صفحه داده شده که فاصله اقلیدسی هیچ دو جفتی از آنها یکسان نیست. به ازای هر نیم‌صفحه، نقاطی را که در آن قرار دارند در نظر بگیرید. جفت نقطه‌ای را که در این میان کمترین فاصله را دارند، به صورت یک زوج نامرتب در مجموعه A وارد کنید. ثابت کنید تعداد این زوجهای متمایز درون A از $O(n)$ خواهد بود.

موفق و مؤید باشید!