

## دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

### آزمون نهایی نظری اول

وقت: ۵ ساعت

سه شنبه ۲۱ شهریور ۱۳۹۱

#### مسئله اول. عدد درخت ..... ۲۵ امتیاز

درخت  $T$  با رئوس  $1, \dots, n$  داده شده است. به ازای هر راس همانند  $v$ ، تعداد مولفه های فرد عضوی  $G - v$  منهای تعداد مولفه های زوج عضوی  $G - v$  بدست آورده و یادداشت می کنیم. عدد درخت  $T$ ، برابر است با مجموع اعداد یادداشت شده. در صورتیکه عدد تمام درخت های  $n$  راسی را با یکدیگر جمع کنیم، علامت این عدد را بدست آورید. (مثبت، صفر و یا منفی)

#### مسئله دوم. کمترین مقدار ..... ۳۵ امتیاز

آرایه ای از اعداد حقیقی به طول  $n$  داده شده است. شما اجازه دارید الگوریتمی از  $O(n)$  ارائه دهید و پس از آن تعدادی سوال به شکل زیر مطرح می شود که باید با  $O(1)$  به آنها پاسخ گوید:

به عنوان ورودی، بازه ای از آرایه اولیه مشخص می شود که طول بازه، حداقل  $n^{0.1}$  است. به عنوان خروجی باید عدد با مقدار کمینه در این بازه را ارائه دهید.

#### مسئله سوم. مرتب کردن اعداد ..... ۴۰ امتیاز

جایگشت  $a_1, a_2, \dots, a_n$  از اعداد  $1, 2, \dots, n$  داده شده است. ما در هر مرحله می توانیم عملیات زیر را روی جایگشت انجام دهیم.

در این عملیات یکی از اعداد جایگشت مثل  $x$  را انتخاب می کنیم. سپس بقیه ی اعداد جایگشت به چهار دسته تقسیم می شوند. آنهایی که قبل از  $x$  آمده اند و از  $x$  کوچکترند، آنهایی که بعد از  $x$  آمده اند و از  $x$  کوچکترند، آنهایی که قبل از  $x$  آمده اند و از  $x$  بزرگترند و آنهایی که از  $x$  بزرگترند و بعد از آن آمده اند. در انتهای این عملیات هر کدام از این چهار دسته نسبت به خودشان مرتب می شوند. مثلاً اگر اعدادی که قبل از عدد  $x$  در جایگشت آمده اند و از  $x$  کوچکترند،  $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$  باشند که  $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$  در پایان این عملیات این  $k$  عدد طوری در جایگاه های  $i_1, \dots, i_k$  قرار می گیرند که به ازای هر  $j < l$  عدد قرار گرفته در جایگاه  $i_j$  کمتر از عدد جایگاه  $i_l$  باشد.

الگوریتمی از  $O(n)$  ارائه دهید که یک جایگشت از ورودی بگیرد و تعیین کند که آیا می توان با تعداد متناهی از این عملیات ها جایگشت را مرتب کرد یا نه.

نتیجه ی عملیات فوق روی عدد ۵ در جایگشت ۳،۸،۱،۷،۵،۴،۶،۲ جایگشت زیر خواهد بود:

۱،۷،۳،۸،۵،۲،۶،۴