

باسمه تعالی
هفدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر
امتحان نظری اصلی چهارم

چهارشنبه ۲۴ مرداد ۱۳۸۶

وقت: ۵ ساعت

زادی مقدّم، نیک‌زاد، باطنی

مسئله‌ی اول: مستطیل‌های پوشاننده ۳۰ نمره

عدد k همراه با n نقطه با مختصات صحیح داده شده‌اند که قدر مطلق مختصات این نقاط از n کمتر است. می‌خواهیم تعدادی مستطیل با مساحت حداکثر k و با اضلاع موازی محورهای مختصات در صفحه قرار دهیم به طوری که تمام این n نقطه را بپوشانند.^۱ علیرضا توانسته با استفاده از x مستطیل همه‌ی نقاط را بپوشاند. ما هم برای پوشاندن نقاط روش زیر را انتخاب می‌کنیم:

در هر لحظه مستطیلی با شرایط مسئله را انتخاب می‌کنیم که بیشترین تعداد نقاطی را که تاکنون پوشیده نشده‌اند را بپوشاند. این کار را تا زمانی که نقطه‌ی پوشیده نشده‌ای وجود دارد ادامه می‌دهیم.

اگر تعداد نقاط پوشیده نشده قبل از انتخاب مستطیل i ام را a_i بنامیم؛

(الف) ثابت کنید که تعداد نقاطی که در مرحله‌ی i ام به نقاط پوشیده شده اضافه می‌شوند لااقل $\frac{a_i}{2}$ است.

(ب) ثابت کنید که پس از x مرحله انتخاب مستطیل تعداد نقاط انتخاب نشده حداکثر $\frac{2}{3}$ می‌باشد.

(ج) ثابت کنید الگوریتم ما از حداکثر $\lg(n)$ مستطیل برای پوشاندن کل نقاط استفاده می‌کند.

مسئله‌ی دوم: دروغگو! ۳۰ نمره

افشین یک گراف ساده دارد که $2n$ رأس و $1 + n^2$ یال دارد. وحید بعد از چند ماه بررسی گراف افشین، به او گفته که این گراف دقیقاً یک تطابق کامل دارد. ثابت کنید وحید دروغ گفته است.

مسئله‌ی سوم: مصائب مسئول دوره ۴۰ نمره

صبح یک روز تابستانی، مسئول دوره‌ی یکی از المپیادها متوجه شد که n سری برگه‌ی تصحیح‌نشده روی دستش مانده و باید این نمرات را تا شب به بچه‌ها اعلام کند!

پس از مشورت با سایر اعضای کمیته، مسئول دوره دریافت که m نفر از دوستانش حاضرند در تصحیح کردن این برگه‌ها به او کمک کنند. می‌دانیم اگر مصحح i ام ($1 \leq i \leq m$) بخواهد برگه‌های سری j ام ($1 \leq j \leq n$) را تصحیح کند، $C_{i,j}$ ثانیه^۲ طول می‌کشد. هم‌چنین هر سری برگه باید تنها توسط یک مصحح تصحیح شوند و هیچ مصححی نمی‌تواند در یک لحظه بیش از یک سری برگه‌ی تصحیح نشده در اختیار داشته باشد. از سوی دیگر، پس از اتمام یک سری برگه، مصحح می‌تواند بلافاصله سری دیگری که هنوز تصحیح نشده را از مسئول دوره گرفته و شروع به تصحیح آن کند.

می‌دانیم مصححان در ثانیه صفر (از ابتدای روز) کارشان را شروع می‌کنند و هر مصحح، پس از اتمام همه‌ی برگه‌های یک سری، نمرات آن را بلافاصله روی تابلو می‌چسباند. با این حال اگر نمرات یک سری برگه در ثانیه s از ابتدای روز^۳ روی تابلو چسبانده شود، بچه‌ها s واحد ناراحت می‌شوند!

به مسئول دوره کمک کنید و الگوریتمی چندجمله‌ای بر حسب m و n بدهید که با داشتن تمام $C_{i,j}$ ها، مشخص کند هر سؤال باید در چه زمانی و توسط کدام مصحح تصحیح شود تا مجموع ناراحتی‌های بچه‌ها کمینه شود.

«موفق باشید!»

^۱ یک نقطه پوشانیده می‌شود اگر و فقط اگر درون حداقل یک مستطیل قرار بگیرد

^۲ که عددی مثبت و نه‌لزوماً صحیح است

^۳ که عددی مثبت و نه‌لزوماً صحیح است