

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نهمایی تئوری

شنبه ۱۹ شهریور ۱۳۹۰

وقت: ۵ ساعت

مسئله اول. کبریت بازی ۲۵ امتیاز

یک جدول $n \times n$ را در نظر بگیرید که اضلاع آن با چوب-کبریت ساخته شده است. یک مسیر خوب در این جدول، مسیر جهت‌داری است که ما را با عبور از چوب کبریت‌های افقی و عمودی جدول از پایین‌ترین و چپ‌ترین خانه به بالاترین و راست‌ترین خانه برساند و جهت مسیر همیشه به سمت راست یا بالا باشد. به ازای هر زیرمجموعه از چوب کبریت‌ها، این زیرمجموعه را از جدول حذف می‌کنیم و تعداد مسیرهای خوب را محاسبه و یادداشت می‌کنیم. ثابت کنید تعداد اعداد متمایز یادداشت شده حداقل 2^n است.

مسئله دوم. جایگشت k -متبادل ۳۵ امتیاز

در یک دنباله از اعداد، یک عنصر را قله می‌نامیم اگر از هر دو عنصر مجاور خودش بزرگتر باشد. یک جایگشت از اعداد ۱ تا n را k -متبادل می‌نامیم اگر در آن حداکثر k قله وجود داشته باشد. به شما n و k داده شده است. الگوریتمی از $O(n^2 k)$ ارائه دهید که تعداد جایگشت‌های n تایی k -متبادل را بشمارد. برای اینکه انجام ۴ عمل اصلی روی اعداد بزرگ در زمان الگوریتم شما تاثیر نگذارد، این تعداد را باقیمانده بر ۱۳ بدست آورید.

مسئله سوم. گراف ماکسیمال ۴۰ امتیاز

گرافی داریم که دور زوج ندارد و یال‌های آن ماکسیمال است. ثابت کنید اگر اندازه‌ی ماکسیمم مجموعه مستقل آن k باشد آن گاه $\lceil n/3 \rceil \leq k \leq \lceil 2n/3 \rceil - 1$.