

باسمه تعالی
نوزدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر
آزمون میان‌ترم درسی الگوریتم

چهارشنبه ۷ مرداد ۱۳۸۸

نصیری شرق، صادقی، مهدیه

وقت: ۱۰۵ دقیقه

مسئله‌ی اول: داده ساختار جدید ۲۰ نمره
داده ساختاری شبیه Stack طراحی کنید که علاوه بر عملیات $PUSH(x)$ و $POP()$ که در Stack هست، بتواند عمل $FINDMIN()$ را نیز پشتیبانی کند. عمل $FINDMIN()$ باید کم‌ترین عنصر را از بین عناصر موجود در Stack برگرداند. کلیه عملیات فوق باید در $O(1)$ انجام شوند.

مسئله‌ی دوم: ساخت BST ۲۵ نمره
امین الگوریتمی پیدا کرده که می‌تواند n عدد صحیح را از ورودی گرفته و یک درخت دودویی جست‌جو شامل این عناصر بسازد. ثابت کنید الگوریتم امین الزاماً از $\Omega(n \lg n)$ است.

مسئله‌ی سوم: بهینه‌سازی QuickSort ۲۵ نمره
می‌دانیم مشکل اصلی QUICKSORT در پیدا کردن کلید قسمت Partition است. به طوری که اگر کلید عنصر مناسبی باشد دو زیر مسئله ما اندازه‌های برابر (و مساوی $\frac{n}{2}$) خواهند داشت و اگر کلید عنصر مناسبی از آب در نیاید، رابطه بازگشتی ما گند خواهد بود. برای حل این مشکل، علی قسمت انتخاب کلید تابع Partition را (که روی [زیر]آرایه‌ی $1 + l - r = n$ عنصره‌ی $A[l..r]$ اجرا می‌شود)، به صورت زیر می‌نویسد.

(۱) ابتدا ماکزیمم عناصر آرایه را در $O(n)$ پیدا کن و آن را M بنام.

(۲) سپس مینیمم عناصر آرایه را در $O(n)$ پیدا کن و آن را m بنام.

(۳) برای هر عنصر A_i از n عنصر موجود در آرایه (زیر آرایه)، مقدار $C_i = \max(M - A_i, A_i - m)$ را حساب کن.

(۴) عنصری که C_i آن کم‌تر یا مساوی سایر C_i هاست را q بنام $(\forall_{i=1}^n C_q \leq C_i)$

(۵) $A[q]$ را عنصر کلید برای Partition قرار بده. یعنی $key \leftarrow A[q]$.

دقت کنید که کل این رویه ۵-مرحله‌ای قرارست جایگزین $key \leftarrow A[random(l..r)]$ بشود.

آیا با این کار علی تغییری در بهترین و بدترین زمان اجرای الگوریتم QUICKSORT به وجود می‌آید؟ جواب خود را در صورت لزوم با مثال و رابطه بازگشتی و یا اثبات بیان کنید.

مسئله‌ی چهارم: راه رفتن ملودیکال ۳۰ نمره

گراف ساده و بدون جهت $G(V, E)$ با $|V| = n$ رأس و $|E| = e$ یال داده شده است. وزن یال‌های این گراف همگی یک هستند، منتهی روی هر یک از یال‌های این گراف، دقیقاً یکی از هفت نت موسیقی (دو، ر، می، فا، سل، لا، سی) نوشته شده است.

یک مسیر در این گراف را ملودیکال می‌گوییم اگر نت روی یال‌های مسیر به این صورت باشد: دو، ر، می، فا، سل، لا، سی، لا، سل، فا، می، ر، دو، ر، ... یعنی الزاماً از اولین نت شروع بشود، تا نت آخر برود و بعد برگردد و تا اولین نت برود و ... دقت کنید که مسیر «ر، می، فا» موزیکال نیست چون از «دو» شروع نمی‌شود؛ مسیر «دو، ر، می، فا، سل، لا، سی، دو، ر» هم موزیکال نیست چون باید بعد از سی (بالاترین نت) پایین بیاییم (...، لا، سی، لا، سل، ...). به عبارت دیگر نمودار نت‌های مسیر با شروع از دو به صورت زیگزاگ (کوهستانی) خواهد بود.

آبتین می‌خواهد روی این گراف کوتاهترین مسیر ملودیکال ممکن از رأس داده‌شده‌ی s به رأس داده‌شده‌ی t را پیدا کند. سعی کنید برای این کار یک الگوریتم $O(n + e)$ بدهید و الگوریتم خود را تحلیل و اثبات کنید.

در صورتی که الگوریتم شما درست و چندجمله‌ای باشد ولی از $O(n + e)$ بیش‌تر طول بکشد، شما بخشی از نمره را خواهید گرفت. هر چقدر الگوریتم شما از لحاظ مرتبه‌ی اجرا بهتر باشد نمره بیشتری می‌گیرید. بخشی از نمره به تحلیل و اثبات الگوریتمی که نوشته‌اید تعلق می‌گیرد.

«شاد باشید!»