

باسمه تعالی  
نوزدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر

آزمون نهایی نظری اول

شنبه ۲۴ مرداد ۱۳۸۸

وقت: ۵ ساعت

زادی‌مقدم، مهدیه

مسئله‌ی اول: زیردنباله‌های خوب ..... ۳۰ نمره

یک جایگشت از  $1, 2, \dots, n$  داده شده است ( $n \geq 32$ ). یک زیردنباله از آن تعدادی از عناصر این جایگشت‌اند که لزوماً پشت‌سرهم قرار ندارند. یک زیردنباله را خوب می‌نامیم، اگر دو خاصیت داشته باشد:

(۱) طولش حداقل به اندازه  $\lg n$  باشد.

(۲) اختلاف هر دو نفر متوالی در آن ۱ باشد.

(۳) صعودی باشد. (از چپ به راست اعضای این دنباله به ترتیب صعودی مرتب شده باشند)

ثابت کنید بیش از نیمی از جایگشت‌ها اصلاً زیردنباله خوب ندارند.

مسئله‌ی دوم: گراف‌های زیبا ..... ۳۰ نمره

گراف همبند و بی‌وزن  $G$  را در نظر بگیرید.  $G$  را  $k$ -زیبا گوئیم اگر بتوان یال‌های آن را اعداد با ۱ تا  $k$  طوری وزن‌دار کرد که کم‌وزن‌ترین مسیر بین هر دو راس یکتا باشد (وزن یک مسیر جمع اعداد روی یال‌های آن است).  $k(G)$  را کمترین  $k$  می‌گیریم که  $G$ ،  $k$ -زیبا باشد. اندازه (تعداد رئوس) بزرگ‌ترین مولفه دوهمبند راسی  $G$  را  $c(G)$  بگیریم.

ثابت کنید به ازای هر گراف همبند  $G$ ،  $k(G) < c(G)$  است.

مسئله‌ی سوم: سلسله مراتب اداری ..... ۴۰ نمره

$n$  نفر برای کار در یک اداره انتخاب شده‌اند. این  $n$  نفر با اعداد ۱ تا  $n$  شماره گذاری شده‌اند. هر یک از این  $n$  نفر مجموعه‌ای از قابلیت‌ها دارد. هر مجموعه قابلیت زیرمجموعه‌ای از  $\{1, \dots, m\}$  است.

یک سلسله مراتب اداری، روشی برای نسبت دادن یک رئیس به بعضی افراد اداره است به طوری که اگر فرد  $a$  رئیس فرد  $b$  باشد، قابلیت‌های  $b$  باید زیرمجموعه‌ی سره قابلیت‌های  $a$  باشد (مجموعه قابلیت‌هایشان نباید یکی باشد). در یک سلسله مراتب اداری، یک فرد مدیر ارشد است اگر رئیسی نداشته باشد. برای اینکه هماهنگی اداره راحت‌تر باشد می‌خواهیم تعداد مدیران ارشد کمینه باشند.

الگوریتمی با زمان اجرای از  $O(mn)$  ارائه کنید که با گرفتن مجموعه‌ی قابلیت‌های همه‌ی افراد، یک سلسله مراتب اداری بیابد که کمترین تعداد مدیر ارشد را دارد. خروجی الگوریتم باید  $n$  عدد باشد: عدد  $i$  ام شماره‌ی رئیس فرد  $i$  است، یا صفر است اگر او رئیسی ندارد.

در صورتی که زمان اجرای الگوریتمتان  $O(mn)$  نباشد، بسته به کارایی الگوریتم حداکثر ۲۰ نمره سوال را دریافت می‌کنید.

«موفق باشید»