

مسئله‌ی اول: جشن‌واره ۱۰ نمره

در یک جشن‌واره m فیلم سینمایی به نمایش در می‌آید و n نفر به داوری فیلم‌ها می‌پردازند. هر داور به هر فیلم نمره‌ی قبول یا رد می‌دهد. می‌دانیم به دلیل نزدیک بودن معیارهای داوران برای قضاوت در مورد فیلم‌ها، هر دو داور حداکثر در مورد d فیلم با یک‌دیگر اختلاف عقیده دارند. در این جشن‌واره روش انتخاب فیلم‌های برگزیده به این ترتیب است که در مورد هر یک از m فیلم یک گروه $\frac{n}{2}$ نفری از داوران به تصادف انتخاب می‌شوند (n حتماً عددی زوج است) و نمره‌ی آن‌ها در مورد فیلم مورد نظر بررسی می‌شود. فیلم در صورتی برگزیده می‌شود که بیش از نیمی از آن‌ها به فیلم نمره قبول داده باشند.

ثابت کنید فاصله‌ی مجموعه‌ی فیلم‌های مورد قبول هر داور با مجموعه‌ی برگزیده نمی‌تواند بیش‌تر از $4d$ باشد. فاصله‌ی دو مجموعه برابر است با تعداد عناصری که دقیقاً در یکی از دو مجموعه عضویت دارند.

مسئله‌ی دوم: داوری ۱۰ نمره

دو تیم قرمز و آبی با n بازیکن در هر تیم، از شما دعوت کرده‌اند تا بازی آن‌ها را داوری کنید. در طول این بازی، هر بازیکن فقط می‌تواند با هم‌تیمی‌هایش صحبت کند. ابتدا هر بازیکن یک عدد دل‌خواه بین ۱ تا n را بر روی یک کارت می‌نویسد و در پشت کارت نام تیم خود را یادداشت می‌کند (اعداد بازیکنان هر تیم می‌تواند تکراری باشد). سپس همه‌ی $2n$ کارت جمع می‌شود و پس از بُر خوردن به شما تحویل می‌گردد. شما بدون آن که بدانید هر کارت متعلق به چه تیمی است، با یک الگوریتم که توسط خودتان تعیین می‌شود و قبل از بازی به هر دو تیم اعلام می‌کنید، دو کارت را انتخاب می‌کنید. توجه کنید الگوریتم شما باید به گونه‌ای باشد که برای هر دسته‌ی $2n$ تایی دل‌خواه، دو کارت را انتخاب کند.

پس از این انتخاب به پشت کارت‌های انتخاب شده نگاه می‌کنید. در صورتی که هر دو کارت متعلق به یک تیم بود آن تیم برنده است، و در غیر این صورت نتیجه مساوی خواهد بود.

الگوریتمی طراحی کنید که بر اساس آن اگر بازیکنان یک تیم به اندازه‌ی کافی باهوش باشند بتوانند اعدادشان را طوری انتخاب کنند که مطمئن باشند تیمشان بازنده نخواهد بود.

مسئله‌ی سوم: بازی ۱۰ نمره

یک گراف به صورت دور 100 راسی داریم که راس‌های آن به ترتیب از ۱ تا 100 شماره گذاری شده‌اند. در ابتدای بازی یک مهره روی راس شماره ۱ قرار دارد. در هر حرکت به احتمال $\frac{1}{2}$ مهره را از طریق یال سمت چپ و به احتمال $\frac{1}{2}$ از طریق یال سمت راست به راس مجاور منتقل می‌کنیم. بازی درست در لحظه‌ای که مهره حداقل یک بار روی هر راس قرار گرفته باشد، متوقف می‌شود. به وضوح با پایان بازی مهره دقیقاً از ۹۹ یال حداقل یک بار عبور کرده است و از دقیقاً یک یال عبور نکرده است. احتمال آن که یال باقی‌مانده بین دو راس 50 و 51 باشد چند برابر احتمال آن است که یال باقی‌مانده بین دو راس ۱ و ۲ باشد؟ دلیل خود را ذکر کنید.