باسمه تعالی

هفدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر

آزمون میان‌ترم درس ترکیبیات

پنج‌شنبه ۴ مرداد ۱۳۸۶

حاتمی، زادی‌مقدّم — وقت: ۲ ساعت

مسئله‌ی اوّل ..... ۱۵ نمره

فرض کنید X یک مجموعه‌ی n عضوی باشد و A_1، A_2، ... و A_n زیرمجموعه‌هایی از X با میانگین اندازه‌ی $\frac{n}{w}$ باشند. ثابت کنید اگر $n \geq 2w^2$ باشد، $i \neq j$ وجود دارد که:

$$|A_i \cap A_j| \geq \frac{n}{2w^2}$$

مسئله‌ی دوم ..... ۲۵ نمره

می‌گوییم مجموعه A توسّط رنگ‌آمیزی c، مختلف رنگ شده‌است اگر $|c(A)| = |A|$؛ به‌عبارت دیگر برای هر $x \neq y \in A$ داشته باشیم $c(x) \neq c(y)$.

فرض کنید $\mathcal{F}$ یک خانواده‌ی r-منتظم از مجموعه‌هایی از نقاط باشد. ثابت کنید یک رنگ‌آمیزی برای نقاط وجود دارد که حداقل $|\mathcal{F}|(\frac{(r-1)!}{r^{r-1}})$ از مجموعه‌های موجود در $\mathcal{F}$ را به‌طور مختلف رنگ می‌کند.

مسئله‌ی سوم ..... ۲۵ نمره

فرض کنید $H = (V, E)$ یک ابرگراف k-منتظم باشد که $k \geq 4$ و $|E| \leq \frac{4^{k-1}}{3^k}$.

ثابت کنید یک رنگ‌آمیزی از رئوس H با ۴ رنگ وجود دارد که هر یال حداقل یک رأس از هر رنگ داشته باشد.

مسئله‌ی چهارم ..... ۳۵ نمره

دنباله‌ی nتایی $a_1, a_2, \cdots a_n$ داده شده است به طوری که هر عضو این دنباله به صورت تصادفی از بین اعداد $0, 1, \cdots, n^6$ انتخاب شده است. مقدار $S_{i,j}$ را برابر جمع اعداد $a_i, a_{i+1}, \cdots, a_j$ قرار دهید. حال می‌خواهیم به جای هر a_i یک مقدار نامنفی جدیدی قرار دهیم که:

- اوّلاً مقدار جدید حداکثر نصف مقدار قبلی باشد
- ثانیاً به ازای هر $i < j$ و $k < l$، که قبلاً داشتیم $S_{i,j} \leq S_{k,l}$، به ازای مقادیر جدید a_iها نیز همین نامساوی را داشته باشیم.

در زیر می‌خواهیم به کمک شما روشی ارائه دهیم که به احتمال خوبی این کار را برای ما انجام می‌دهد.

الف) ثابت کنید اگر همه‌ی a_iها زوج باشند، حتماً این کار شدنی است.

ب) اگر از هر a_i که فرد است یک واحد کم کنیم به مقادیر جدیدی برای a_iها می‌رسیم که همه‌ی آن‌ها زوج‌اند. اما ممکن است جهت بعضی از نامساوی‌های $S_{i,j} \leq S_{k,l}$ عوض شود. ثابت کنید به ازای هر i, j, k, l احتمال عوض شدن جهت نامساوی $S_{i,j} \leq S_{k,l}$ حداکثر $\frac{2}{n^5}$ است.

ج) با استفاده از قسمت ب، ثابت کنید اگر از همه‌ی a_iهای فرد یک واحد کم کنیم، احتمال اینکه جهت حتی یکی از نامساوی‌ها عوض شود کمتر از $\frac{2}{n}$ است. در نتیجه در این روش با احتمال حداقل $1 - \frac{2}{n}$ می‌توانیم بدون عوض شدن جهت نامساوی‌ها همه‌ی اعداد را زوج کنیم سپس با استفاده از قسمت الف به نتیجه‌ی مطلوب می‌رسیم.

«موفّق باشید!»