

شانزدهمین دوره‌ی آموزشی المپیاد کامپیوتر

آزمون نهایی نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها

شنبه ۱۴ مرداد ۱۳۸۵

وقت: ۱۴۰ دقیقه

میرجلالی و دوستان

(۱) (۱۰ نمره) اگر A و B و C زبان‌هایی با الفبای Σ باشند، گزاره‌های زیر را اثبات یا نقض کنید:

(a) (۲ نمره) $\exists A \subseteq \Sigma^* : \overline{A^*} = \overline{A}^*$

(b) (۴ نمره) $\forall A, B, C \subseteq \Sigma^* : A.(B \cup C) = A.B \cup A.C$

(c) (۴ نمره) $\forall A, B, C \subseteq \Sigma^* : A.(B \cap C) = A.B \cap A.C$

(۲) (۱۵ نمره) برای زبان‌های زیر گرامر (بدون محدودیت) دهید:

(a) (۶ نمره) $MULT = \{a^m.b^n.c^k | m, n \geq 0 \wedge k = m \times n\}$

(b) (۹ نمره) $WW = \{w.w | w \in \{0, 1\}^*\}$

(۳) (۱۰ نمره) اگر R_i ها زبان‌هایی منظم باشند آیا $\bigcap_{i=1}^{\infty} R_i$ هم لزوماً زبانی منظم است؟ گفته‌ی خود را اثبات کنید.

(۴) (۱۰ نمره) گرامر $G = (V, \Sigma, R, \langle STMT \rangle)$ سازنده‌ی قسمتی از یک زبان برنامه‌نویسی است:

$$\Sigma = \{\text{if, condition, then, else, begin, end, a:=1, ;}\}$$

$$V = \{\langle STMT \rangle, \langle \text{IF-THEN} \rangle, \langle \text{IF-THEN-ELSE} \rangle, \langle \text{BEGIN-END} \rangle, \langle \text{STMT-LIST} \rangle, \langle \text{ASSIGN} \rangle\}$$

$$R = \begin{cases} \langle STMT \rangle & \longrightarrow \langle \text{ASSIGN} \rangle \mid \langle \text{IF-THEN} \rangle \mid \langle \text{IF-THEN-ELSE} \rangle \mid \langle \text{BEGIN-END} \rangle \\ \langle \text{IF-THEN} \rangle & \longrightarrow \text{if condition then } \langle STMT \rangle \\ \langle \text{IF-THEN-ELSE} \rangle & \longrightarrow \text{if condition then } \langle STMT \rangle \text{ else } \langle STMT \rangle \\ \langle \text{BEGIN-END} \rangle & \longrightarrow \text{begin } \langle \text{STMT-LIST} \rangle \text{ end} \\ \langle \text{STMT-LIST} \rangle & \longrightarrow \langle \text{STMT-LIST} \rangle ; \langle STMT \rangle \mid \langle STMT \rangle \\ \langle \text{ASSIGN} \rangle & \longrightarrow \text{a:=1} \end{cases}$$

(a) (۴ نمره) نشان دهید G گرامری مبهم است.

(b) (۶ نمره) گرامری غیرمبهم ارائه دهید که هم‌ارز G باشد.

(۵) (۲۰ نمره) یک «ماشین تورینگ یک‌بارنوشتنی» یک ماشین تورینگ است با یک نوار که هر خانه‌ی آن (شامل بخشی از نوار که ورودی روی آن قرار گرفته) را حداکثر یک بار می‌توان تغییر داد. به طریق مشابه، خانه‌های یک «ماشین تورینگ دوبارنوشتنی» را حداکثر دو بار می‌توان تغییر داد.

(a) (۹ نمره) نشان دهید ماشین تورینگ دوبارنوشتنی با مدل معمولی ماشین تورینگ هم‌ارز است.

(b) (تمام نمره) نشان دهید ماشین تورینگ یک‌بارنوشتنی با مدل معمولی ماشین تورینگ هم‌ارز است.

۶) (۳۵ نمره) برای هر یک از زبان‌های زیر (با استدلال) مشخص کنید جزء کدام یک از زده‌های زیر قرار می‌گیرند و جزء کدام زده‌ها قرار نمی‌گیرند. معمولاً برای هر زبان استدلال در مورد دو زده دارای اهمیت است. زده‌ها:

- منظم (Regular)
- مستقل از متن (Context-free)
- تصمیم‌پذیر (Decidable)
- تشخیص‌پذیر/شمارش‌پذیر (Recognizable/Enumerable)
- متمم تشخیص‌پذیر (Co-Recognizable)

زبان‌ها:

(a) (۸ نمره)

$$LEAST_{100} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is a Turing machine and } L(M) \text{ has at least 100 elements}\}$$

(b) (۸ نمره)

$$MOST_{100} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is a Turing machine and } L(M) \text{ has at most 100 elements}\}$$

(c) (۹ نمره)

$$HALT_{10000} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is a Turing machine that halts on any input and } |\langle M \rangle| \leq 10000\}$$

(d) (۱۰ نمره)

$$MIN = \{a^m.b^n.c^k \mid k \geq \min(m, n)\}$$