

باسمه تعالی
هجدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر

آزمون نظری اول

پنج‌شنبه ۲۰ تیر ۱۳۸۷

وقت: ۵ ساعت

زادی‌مقدم، مهینی

مسئله‌ی اول: افراز متوازن ۳۰ نمره

تعدادی عدد طبیعی به شکل توان‌های دو به ما داده‌اند. می‌دانیم که از هر توان دو حداکثر دو تا به ما داده شده است. مثلاً ممکن است به ما اعداد $1, 1, 2, 4, 8, 32, 32$ را بدهند. ثابت کنید حداکثر به یک روش می‌توان این اعداد را به دو دسته با مجموع برابر افراز (تقسیم) کرد. مثلاً تنها راه افراز به دو دسته‌ی برابر در بالا به شکل $(1, 1, 2, 4, 32), (8, 32)$ است.

مسئله‌ی دوم: جدول نسبتاً مرتب ۳۰ نمره

یک جدول $m \times n$ از اعداد طبیعی متفاوت داده شده است. عدد واقع در خانه‌ی (i, j) (سطر i و ستون j) از عددهای واقع در خانه‌های $(i + 1, j)$ و $(i, j + \lfloor \sqrt{j} \rfloor)$ کمتر است. عدد x به ما داده شده است. می‌خواهیم ببینیم که آیا x در این جدول وجود دارد یا خیر. الگوریتمی از $O(m\sqrt{n} + n)$ برای این کار ارائه دهید.

مسئله‌ی سوم: سپید و سیاه ۴۰ نمره

خانه‌های یک جدول $m \times n$ را با رنگ‌های سفید و سیاه رنگ کرده‌اند. ما در هر مرحله می‌توانیم یک زیرمستطیل این جدول را به شرطی که (این زیرمستطیل) شامل لااقل دو خانه‌ی سیاه باشد، انتخاب کرده و رنگ کل خانه‌های این زیرمستطیل را عوض کنیم. ثابت کنید با تعدادی از این حرکات می‌توان به جدولی برسیم که حداکثر یک خانه سیاه دارد.