

## دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

### آزمون نظری اول

وقت: ۵ ساعت

پنج شنبه ۱۳ تیر ۱۳۹۲

#### مسئله اول. آقا فرهاد بر کانگورو ..... ۳۰ امتیاز

جایگشت  $\pi$  از اعداد ۱ تا  $n$  داده شده است. دستگاهی داریم که عدد طبیعی  $k$  را از ما می‌گیرد و یک زیر دنباله‌ی  $k$  - صعودی نزولی یا یک زیر دنباله‌ی  $k$  - نزولی صعودی را که طولش بیشینه باشد، از دنباله حذف می‌کند. کمترین تعداد مراحل برای حذف کل جایگشت را  $f(\pi)$  می‌نامیم.  $p(n)$  را بیشینه مقدار  $f$  در همه‌ی جایگشت‌های  $n$  تایی بگیرید. ثابت کنید  $p(n)$  از  $\theta(\sqrt{n})$  است.

به یک دنباله مثل  $a_1, a_2, \dots, a_{r(k-1)+1} - k$  - صعودی نزولی می‌گوییم اگر دنباله‌ی  $a_{t(k-1)+1}, a_{t(k-1)+2}, \dots, a_{(t+1)(k-1)+1}$  به ازای هر  $t$  زوج که  $0 \leq t < r$  دنباله‌ای نزولی باشد. به یک دنباله مثل  $a_1, a_2, \dots, a_{r(k-1)+1} - k$  - نزولی صعودی می‌گوییم اگر دنباله‌ی  $a_{t(k-1)+1}, a_{t(k-1)+2}, \dots, a_{(t+1)(k-1)+1}$  به ازای هر  $t$  فرد که  $0 \leq t < r$  دنباله‌ای نزولی باشد. مثلاً جایگشت  $\pi = 1, 5, 2, 7, 6, 3, 4$  با  $k = 4$  تبدیل به  $5, 7, 6$  می‌شود و با یک مرحله دیگر و  $k = 2$  کار تمام است. با تعداد کمتری مرحله هم این کار امکان‌پذیر نیست. پس  $f(\pi) = 2$ .

#### مسئله دوم. درخت بنفش - سبز ..... ۳۵ امتیاز

درختی  $n$  راسی داریم ( $n > 3$ ). می‌خواهیم روی هر یال این درخت یکی از اعداد  $1, 0, -1$  را قرار دهیم طوری که به ازای هر یال مجموع یال‌های مجاورش عددی مثبت باشد و همچنین مجموع اعداد یال‌ها کمینه شود. ثابت کنید این مجموع حداکثر  $\lfloor \frac{2(n-1)}{3} \rfloor$  است.

#### مسئله سوم. برگ وسط آقا فرهاد ..... ۳۵ امتیاز

الف)  $1000000$  بازه روی محور اعداد حقیقی داریم که می‌دانیم هیچ  $100$  تایی از آنها در یک نقطه با هم مشترک نیستند. هر بازه بصورت  $(x, y)$  تعریف می‌شود که  $x$  نمایانگر نقطه شروع آن و  $y$  نمایانگر نقطه پایان آن می‌باشد. نشان دهید که می‌توان  $10000$  بازه از آنها را انتخاب کرد که هیچ دوتایی با هم اشتراک نداشته باشند.

ب)  $1000000$  مستطیل که اضلاع آنها موازی محور مختصات هستند، در صفحه داریم که هیچ  $100$  تایی از آنها با هم در یک نقطه مشترک نیستند. نشان دهید که می‌توان  $500$  مستطیل انتخاب کرد که هیچ دو تایی با هم اشتراک نداشته باشند.

