

باسمه تعالی

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نهایی گراف

وقت: ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه

مدرس: جبل عاملی، رضایی

یکشنبه ۳۰ تیر ۱۳۹۱

مسئله اول. مزرعه‌ی کشت گشنیز ۱۰ امتیاز

شرط لازم و کافی برای n را بیابید که هر تورنمنت قویا همبند n راسی شامل راسی مانند v باشد که پس از حذف آن نیز قویا همبند بماند.

مسئله دوم. جدایی فرهاد از دوره ۱۰ امتیاز

گراف ساده، همبند و فاقد یال برشی G داده شده است. ثابت کنید G را می‌توان طوری جهت‌دهی کرد که دور فرد جهت‌دار داشته باشد، اگر و فقط اگر نتوانیم G را طوری جهت‌دهی کنیم که قویا همبند باشد و دور فرد جهت‌دار نداشته باشد.

مسئله سوم. بلوک‌های دوهمبند ۱۵ امتیاز

به ازای گراف‌های ساده‌ی n راسی که راس تنها ندارند، اندازه‌ی مینیم پوشش یالی و مینیم پوشش راسی را با هم جمع می‌کنیم و عدد حاصل را یادداشت می‌کنیم. مینیم و ماکسیم عدد نوشته شده چقدر است؟ (مثلاً برای $n = 3$ مینیم ۲ و ماکسیم ۳ است.)

مسئله چهارم. آقا جبل و علیرضای سحرآمیز ۱۵ امتیاز

گراف n راسی G را در نظر بگیرید. به ازای هر راس G مانند v ، گراف $G - v$ در حد یکریختی و بدون نامگذاری رئوس داده شده است. ثابت کنید:

(الف) وجود دور زوج در گراف G را با استفاده از این n گراف داده شده می‌توان فهمید. (۷.۵ نمره)
(ب) ثابت کنید اگر G دو بخشی باشد با استفاده از این n گراف، می‌توانیم تشخیص دهیم تطابق کامل دارد یا خیر (۷.۵ نمره)

مسئله پنجم. ۱۶۵ یا ۱۸۵ ۲۰ امتیاز

الف) به گراف ساده G زامبی می‌گوییم هرگاه بدون مثلث باشد و هر دو راس غیر مجاور دقیقاً یک همسایه‌ی مشترک داشته باشند. ثابت کنید دقیقاً یک گراف زامبی 101 راسی از نظر یکرختی وجود دارد که 10 منتظم نباشد. (10 نمره)

ب) به گراف ساده‌ی G ابرزامبی می‌گوییم هرگاه هر دو راس دقیقاً یک همسایه‌ی مشترک داشته باشند. ثابت کنید دقیقاً یک گراف ابرزامبی 101 راسی از نظر یکرختی وجود دارد. (10 نمره)

مسئله ششم. گراف بهتر است یا ثروت ۳۰ امتیاز

$f(m, k)$ را اینگونه تعریف کنید :

کمترین مقدار n که هر طور یال‌های k_n را با m رنگ کنیم از یک رنگ تطابقی با اندازه‌ی k داشته باشیم. (m و k اعدادی طبیعی هستند.)

ثابت کنید

$$f(m, k) = (m + 1)(k - 1) + 1$$

آلبرت انیشتین : باور دارم اگر علم گراف یک دهه زودتر گسترش می‌یافت، حال در این علم شاهد پیشرفت بیشتری بودیم.