

باسمه تعالی
هفدهمین دوره المپیاد کامپیوتر
امتحان نهایی نظری دوم

سه‌شنبه ۱۳ شهریور ۱۳۸۶

وقت: ۵ ساعت

زادی‌مقدم، نیک‌زاد

مسئله‌ی اول: رنگ‌آمیزی مسیرها ۲۵ نمره

گراف G یک دور n -رأسی می‌باشد. گراف H را از روی G به این صورت می‌سازیم که به ازای هر مسیر^۱ در G که ابتدا و انتهای آن متفاوتند، یک رأس در H قرار می‌دهیم. سپس بین هر دو رأس از H یک یال قرار می‌دهیم اگر و فقط اگر مسیرهای متناظر این دو رأس در گراف G حداقل در یک یال اشتراک داشته باشند. عدد رنگی گراف H چند است؟ ادعای خود را اثبات کنید.

مسئله‌ی دوم: احتمال دوبخشی بودن ۳۵ نمره

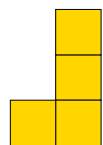
یک گراف به صورت تصادفی از بین گراف‌های ساده‌ی n رأسی ($n > 10$) و $2n$ یالی انتخاب کرده‌ایم. احتمال اینکه این گراف دوبخشی باشد بیشتر است یا اینکه دوبخشی نباشد؟ گفته‌ی خود را اثبات کنید.

مسئله‌ی سوم: کوله‌پشتی و پازل ۴۰ نمره

دو مسئله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

• مسئله‌ی کوله‌پشتی: یک کوله‌پشتی به حجم M داریم.^۲ n کیسه به حجم‌های v_1 تا v_n نیز به ما داده شده است. می‌خواهیم بدانیم آیا زیرمجموعه‌ای از کیسه‌ها وجود دارد که مجموع حجم‌های کیسه‌های آن دقیقاً برابر M باشد و کیسه را کاملاً پر کند یا نه؟ دقت کنید که در یک زیرمجموعه، هر عضو حداکثر یک‌بار می‌آید.

• مسئله‌ی پازل: یک جدول k سطری و k ستونی از خانه‌های 1×1 داریم. k^2 تا شکل نیز به ما داده شده است که هر شکل از تعدادی خانه‌ی 1×1 به هم چسبیده تشکیل شده^۳ و مساحت هر شکل حداکثر k^2 است. می‌خواهیم بدانیم آیا می‌توان تمام جدول را با زیرمجموعه‌ای از این اشکال پوشاند یا نه؟



پوشش جدول به معنی قرار دادن تعدادی از اشکال موجود روی خانه‌های جدول است که هر خانه‌ی جدول دقیقاً و به‌طور کامل زیر یکی از اشکال باشد. دقت کنید که از هر شکل حداکثر یک‌بار می‌توانیم استفاده کنیم و در این یک بار می‌توانیم شکل را بچرخانیم یا حتی دوران بدهیم. برای مثال شکل روبه‌رو را به ۸ طریق می‌توان در جدول قرار داد.

فرض کنید یک ماشین جادویی اختراع شده که مسئله‌ی کوله‌پشتی را در زمان چند جمله‌ای برحسب n حل می‌کند.^۴ ثابت کنید می‌توان با استفاده از این ماشین، مسئله‌ی پازل را نیز در زمان چند جمله‌ای برحسب k حل کرد.

زندگی صحنه‌ی یکتای هنرمندی ماست،
هر کسی نغمه‌ی خود خواند و از صحنه رود؛
صحنه همواره به‌جاست!
خُرّم آن نغمه که مردم بسپارند به یاد...

^۱ دقت کنید که در گراف G بین هر دو رأس متفاوت i و j دقیقاً ۲ مسیر وجود دارد.

^۲ که M می‌تواند خیلی خیلی بزرگ و حتی ناصحیح باشد!

^۳ دو خانه به هم چسبیده‌اند اگر و فقط اگر در یک پاره‌خط به‌طول ۱ اشتراک داشته باشند؛ از این رو هر شکل، «یک تکه» است.

^۴ روایتی از این مسئله که به‌صورت دینامیک حل می‌شود چند جمله‌ای برحسب M و n است؛ نه فقط برحسب n .