

باسمه تعالی
دوره‌ی آموزشی المپیاد کامپیوتر
امتحان نظری اصلی اول

پنج‌شنبه ۲۲ تیرماه ۱۳۸۵

وقت: ۴ ساعت

نصیری شرق، نوروزی

مسئله‌ی اول: مارهای بلا، سیب‌های ناقلا، چاه‌های بی‌انتها ۳۵ نمره

سرزمین «میبلز»^۱ یک جدول نامتناهی در نامتناهی است که در ابتدا n مارگرسنه در n تا از خانه‌های آن، به صورت تصادفی، طوری قرار گرفته‌اند که فاصله‌ی هر دوتای آن‌ها متناهی است. می‌دانیم هر مار در طی هر روز^۲ در یکی از خانه‌های جدول قرار دارد و بسته به شرایط محیط، هر شب به یکی از خانه‌های مجاور^۳ نقل مکان می‌کند. شدت گرسنگی در مارها به حدی است که هر مار با دیدن یک سیب در یکی از خانه‌های جدول، تمام تلاش خود را (مستقل از سایر مارها) به کار می‌برد تا به خانه‌ای که در آن سیب قرار دارد، برسد! از آن‌جا که مارها قادر به دیدن تمامی خانه‌های جدول هستند، می‌توان نتیجه گرفت که وجود یک سیب در یکی از خانه‌های جدول باعث می‌شود هیچ ماری ثابت نمانده و همواره هر ماری تلاش کند به سیب نزدیک شود. اما پس از خورده شدن سیب توسط یکی از مارها (در صورت وجود)، تا قرار گرفتن سیب بعدی در خانه‌ای از جدول همه‌ی مارها بی‌انگیزه سر جای خود می‌مانند! می‌دانیم اگر در ابتدای یک روز، دو مار هم‌زمان در یک خانه‌ی جدول قرار بگیرند، هر دوی آن‌ها (به دلیل رقابت شدید و جای تنگ!) نابود می‌شوند؛ و البته اگر سببی در آن خانه قرار داشته باشد، آن سیب نیز خورده می‌شود.

شاهزاده‌ی سرزمین میبلز به تازگی یک بال‌گرد^۴ خریده است که با استفاده از آن قادر است در ابتدای هر روزی که هیچ سببی روی زمین نیست، یک سیب در یکی از خانه‌های جدول قرار بدهد. بدیهی‌ست که با این کار ممکن است بعضی از مارها در مسیر حرکت به سمت سیب هم‌زمان وارد یک خانه شده و نابود شوند. البته نمی‌توان در خانه‌ای که در آن مار قرار دارد، در همان روز سیب قرار دارد چرا که ممکن است مار آن خانه به هلی‌کوپتر حمله کند! از شما خواسته شده تا با توجه به شرایط خاص هر قسمت، با ارائه‌ی یک روش مناسب (که برای تمام نحوه‌های قرارگیری مارها در ابتدای کار درست کار کند) به شاهزاده کمک کنید تا با هدر دادن کم‌ترین تعداد سیب، بتواند تمام مارهای آن قسمت را در زمان متناهی نابود کند. دقت کنید که اگر در پایان کار (هنگامی که تمامی مارها نابود شدند) سببی دست‌نخورده روی جدول مانده باشد، می‌توانیم آن سیب را برداریم و بداهتاً هزینه‌ی مصرف شده برای آن را نیز پس بگیریم. به بیان دیگر، هزینه‌ی یک روش، تعداد سیب‌هایی است که توسط مارها خورده می‌شود و نه تعداد سیب‌هایی که روی جدول قرار داده می‌شود (به اضافه‌ی هزینه‌ی حفر چاه‌ها در قسمت ب).

الف) (۱۵ نمره) در این قسمت، نحوه‌ی حرکت هر مار بدین صورت است که با دیدن یک سیب، در ابتدای هر شب، اگر در ستونی که سیب در آن قرار دارد نباشد، سعی می‌کند در همان سطری که هست، یک واحد به سمت چپ یا راست برود تا به ستون سیب برسد. اما اگر در ستون سیب قرار داشت، مستقیماً به سمت سیب حرکت می‌کند. بدیهی‌ست که در این رویه، مسیر حرکت هر یک از مارها به صورت یک‌تا تعیین می‌شود.

^۱ Mibbles

^۲ منظور از روز، از صبح علی‌الطّول تا عصر و منظور از شبانه‌روز، یک روز به علاوه‌ی شب آن است

^۳ مجاور ضلعی، حداکثر ۴ خانه

^۴ هلی‌کوپتر

هم چنین می دانیم در یکی از خانه های جدول (به صورت تصادفی؛ ما آن را تعیین نمی کنیم) یک چاه قرار دارد که هر ماری به محض ورود به آن، نابود می شود! می دانیم در ابتدا هیچ ماری در خانه ی چاه نیست و از طرف دیگر، ما هم هرگز اجازه نداریم در خانه ی چاه، سیب قرار بدهیم.

با این شروط، کم ترین هزینه ی لازم برای نابود کردن تمامی مارها (چه از طریق برخورد، چه از طریق افتادن در چاه) چه قدر است؟ روش نابود کردن مارها با این تعداد را توضیح داده و اثبات کنید که این مقدار سیب در حالت کلی کمینه است. مجدداً دقت کنید که در این قسمت (و قسمت بعد) اگر در پایان کار سیبی روی جدول باقی بماند، هزینه ی (سیب های) روش برابر است با تعداد سیب های استفاده شده منهای یک (برای سیبی که در پایان سالم باقی می ماند).

(ب) (۲۰ نمره) در این قسمت نحوه ی حرکت مارها اندکی پیچیده تر است! اگر مار در ستون یا سطر سیب قرار داشته باشد، مشابه قسمت قبل، در همان امتداد به سمت سیب حرکت می کند. اما اگر در سطر و ستونی غیر از سطر و ستون سیب قرار داشته باشد، در هر حرکت صرفاً یک واحد به سیب نزدیک^۵ می شود. برای مثال اگر سیبی در خانه ی بالا چپ یک مار قرار داشته باشد، آن مار در حرکت اول ممکن است به سمت بالا و یا به سمت چپ حرکت^۶ کند؛ حال آن که حرکت دومش (چون با سیب، هم سطر یا هم ستون می شود) یک تاست.

از سوی دیگر، در این قسمت، ما می توانیم همان گونه که در یک خانه (ی خالی) سیب می گذاریم، یک خانه ی خالی را نیز تبدیل به چاه کنیم! بالطبع می توان چاه ها را در وسط کار نیز احداث کرد، اما به دلیل عدم امکان کنترل هیجان مارها، این کار فقط زمانی امکان پذیر است که هیچ سیبی روی زمان نباشد. هم چنین به دلیل امکان ریزش زمین، دو چاه نمی توانند مجاور رأسی^۷ باشند. زمان حفریک چاه ناچیز فرض می شود اما هزینه ی حفر هر چاه، مساوی هزینه ی خورده شدن یک سیب و برابر ۱ سکه ی طلا می باشد. بدیهی ست که حفر چاه در خانه ای که در آن مار یا سیب قرار دارد امکان پذیر نبوده و نیز امکان قرار دادن سیب در خانه ی چاه مقدور نیست.

با این تفاسیر، روشی ارائه دهید که بتوانیم با صرف حداکثر n سکه ی طلا، تمامی مارها را نابود کنیم.

مسئله ی دوم: عرض برشی ۶۵ نمره

مشبکه $k \times k$ یک جدول k^2 گره ای است که هر گره آن به چهار گره بالا، پایین، چپ و راستش در صورت وجود متصل است.

برای هر جایگشت گره های مشبکه، عرض برش جایگشت به این صورت تعریف می شود: اگر همه گره ها در ابتدا سفید باشند و یکی یکی با ترتیب جایگشت مورد نظر شروع به سیاه کردن آنها کنیم، در هر مرحله تعداد یالهای میان گره های سفید و سیاه را در نظر بگیرید. بیشترین تعداد این یالها را عرض برش آن جایگشت می گوئیم. حال برای کل مشبکه، عرض برشی به این صورت تعریف می شود: مقدار کمینه عرض برش جایگشتهای مختلف. از میان تمامی $k^2!$ جایگشت ممکن، جایگشتی که کوچکترین عرض برش را دارد، مقدار عرض برشی کل مشبکه را ایجاد می کند. حال با توجه به تعاریف بالا به سؤالات زیر پاسخ دهید: (برای حل قسمت ج و ب می توانید فرض کنید الف درست است.)

^۵ فاصله ی دو خانه، حداقل تعداد شبانه روز لازم برای رسیدن از یکی به دیگری توسط یک مار است؛ برای مثال دو خانه ی مجاور ضلعی فاصله شان برابر یک و دو خانه ی مجاور رأسی که فقط در یک رأس مشترک باشند، فاصله شان دو واحد است.

^۶ دقت کنید که حرکت هر مار در این قسمت کاملاً تصادفی است اما شما باید در روش تان فرض کنید که هر مار به ترین حرکت برای خودش (که بدترین حرکت برای شما در راستای نابود کردن مارها است) را انجام می دهد. به عبارت دیگر، به تر است فرض کنید مارها به صورت هوشمندانه (و البته در چارچوب قوانین) در تلاش برای حفظ بقا هستند.

^۷ حداکثر ۸ خانه

الف) (۱۰ نمره) برای شبکه $k \times k$ ، $(k \geq 3)$ ثابت کنید عرض برشی کوچکتر و یا مساوی $k + 1$ است.

ب) (۱۵ نمره) برای شبکه 3×3 (۹ گره و ۱۲ یال دارد) عرض برشی را حساب کنید.

ج) (۴۰ نمره) برای شبکه 33×33 ثابت کنید عرض برشی برابر ۳۴ است.

دریا — صبور و سنگین —

می خواند و می نوشت:

— ... من خواب نیستم!

خاموش اگر نشستم،

مرداب نیستم!

روزی که برخوردیم و زنجیر بگسلم،

روشن شود که آتشم و آب نیستم!