

باسمه تعالی
هجدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر

آزمون نظری دوم

پنج‌شنبه ۳۱ مرداد ۱۳۸۷

وقت: ۵ ساعت

زادی‌مقدم

مسئله‌ی اول: دور کوتاه ۳۰ نمره

در گراف G می‌دانیم که درجه‌ی هر راس حداکثر 10 است. الگوریتمی از $O(n)$ ارائه کنید که تشخیص دهد این گراف دور به طول کمتر از 20 دارد یا نه؟ الگوریتم خود را تحلیل و اثبات کنید.

مسئله‌ی دوم: جدول تقریباً مرتب ۳۰ نمره

یک جدول $2 \times n$ که اعداد $1, 2, \dots, 2n$ در آن نوشته شده است را تقریباً مرتب می‌گوییم هرگاه عدد هر خانه‌ی آن از دو عدد موجود در خانه‌های پایینی و سمت راستی‌اش (در صورت وجود) کوچکتر باشد. می‌خواهیم باقیمانده‌ی تعداد چنین جدول‌هایی را بر عدد 10000001 به دست آوریم. برای این کار الگوریتمی از $O(n^2)$ ارائه کنید. الگوریتم خود را تحلیل و اثبات کنید.

مسئله‌ی سوم: مرتب کن ۴۰ نمره

n وزنه با وزن‌های مختلف به ما داده‌اند. می‌توانیم کل این وزنه‌ها را به دو مجموعه‌ی A و B افراز کنیم و به «ماشین توازن» بدهیم. این ماشین به ما می‌گوید که هر عضو A از چند تا از اعضای B بزرگتر است. یعنی خروجی این ماشین برای مقایسه‌ی A با B ، $|A|$ تا عدد بین 0 تا $|B|$ است. دقت کنید که A و B همواره یک افراز برای کل وزنه‌ها محسوب می‌شوند. یعنی A و B اشتراکی ندارند و اجتماعشان برابر کل وزنه‌هاست. با $O(\lg(n))$ بار استفاده از این ماشین وزنه‌ها را مرتب کنید.

«شاداب باشید!»