

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نهایی نظری اول

چهارشنبه ۶ شهریور ۱۳۹۲

وقت: ۵ ساعت

جبل عاملی

مسئله اول. فردای روز انجمن و هوای سالم ۲۵ امتیاز

حداکثر تعداد رأس‌های برشی در گراف اویلری همبند و n راسی چند است؟

مسئله دوم. هیس سارق اتاق سرور فریاد نمی‌زند. ۳۰ امتیاز

در داده ساختار درخت بازه (segment tree) که به وسیله‌ی یک آرایه ذخیره شده است برای ذخیره سازی بازه‌ی متناظر با $[0, n)$ از خانه‌ی ۱ حافظه استفاده می‌کنیم.

الف) حال از این به بعد ازای هر بازه مانند $[f, l)$ که در خانه‌ی i ذخیره شده باشد، بجهی چپ آن که متناظر بازه‌ی $[f, \frac{(f+l)}{2})$ است در خانه‌ی $2i$ و بجهی راست که متناظر بازه‌ی $[\frac{(f+l)}{2}, l)$ است در خانه‌ی $2i + 1$ ذخیره می‌کنیم. برای بازه‌هایی که $l - f \neq 1$ است. فرض کنید می‌خواهیم کمترین مقدار حقیقی و ثابت k را بیابیم که آرایه به طول kn برای ذخیره سازی درخت بازه کافی باشد. این مقدار را بیابید. مثلاً مقدار $k = 2/7$ کافی نمی‌باشد زیرا اگر $n = 6$ باشد، بازه‌ی $[5, 6)$ را در خانه‌ی ۱۵ ام نگه می‌داریم. پس لااقل آرایه‌ای ۱۶ تایی می‌خواهیم و داریم $6 * 2/7 < 16$ (۵ نمره).

ب) همان سوال با این فرض که بجهی سمت چپ را متناظر $[f, \frac{(f+l+1)}{2})$ و بجهی راست را متناظر $[\frac{(f+l+1)}{2}, l)$ در نظر بگیریم. (منظور از حاصل تقسیم بر دو مقدار کف گرفته شده‌ی آن است مانند حاصل تقسیم اعداد صحیح در برنامه‌نویسی).

مسئله سوم. ۶ تا ۵۲ نمیره از یاد تو ۴۵ امتیاز

الف) آرایه‌ای شامل n عدد داریم. می‌خواهیم با اعمال حافظه و زمان پیش‌پردازش $O(n^2)$ به هر query از نوع زیر در زمان $O(\sqrt{n} \lg n)$ پاسخ دهیم.

از بین اعداد i ام تا j ام آرایه k امین عدد از نظر بزرگی کدام است. (۱۵ نمره)

ب) با حافظه‌ی $O(n)$ و پیش‌پردازش $O(n \lg n)$ هر query را در زمان $O(n^{\frac{1}{3}})$ پاسخ دهید. (۳۰ نمره)