

باسمه تعالی

شانزدهمین دوره‌ی آموزشی المپیاد کامپیوتر

امتحان فاینال نظری اول

یکشنبه ۱۲ شهریورماه ۱۳۸۵

وقت: ۵ ساعت

نوروزی، نصیری شرق، زادی مقدم

مسئله‌ی اول: دنباله‌ی زیبا ۲۰ نمره

به دنباله‌ی x_1, x_2, \dots, x_n زیبا می‌گوییم اگر و فقط اگر

$$x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > x_5 < x_6 > \dots x_n$$

الگوریتمی از زمان اجرای $O(n)$ ارائه کنید که n عدد متفاوت بگیرد و آن‌ها را به ترتیبی کنار هم قرار دهد که تشکیل یک دنباله‌ی زیبا بدهند.

مسئله‌ی دوم: صف جنجالی ۵۰ نمره

در شهر «ی.ا.ش.ا»، n صف اتوبوس قرار دارد. برای ایستادن در یک صف اتوبوس دو قاعده زیر باید رعایت شود:

(۱) شماره‌ی هیچ‌کس باید از شماره‌ی تمام افراد جلویی^۱ وی بیش‌تر باشد.

(۲) به‌جز نفرات اول هر صف، مجموع شماره‌ی هرکس و شماره‌ی نفر دقیقاً جلویی او باید مجذور کامل باشد.

با این وصف، اگر شماره‌ی افراد همیشه از یک شروع شود و حداکثر تعداد افرادی که با این قواعد می‌توانند در n صف بایستند را $f(n)$ بنامیم، ثابت کنید ...

$$\text{الف (۲۵ نمره)} \quad f(n) \geq \lfloor \frac{(n+1)^2}{4} \rfloor - 1$$

$$\text{ب (۲۵ نمره)} \quad f(n) \leq \lfloor \frac{(n+1)^2}{4} \rfloor - 1$$

مسئله‌ی سوم: مجموعه‌ی k -آلوده‌ی ماکسیمم ۴۰ نمره

زیرمجموعه‌ی W از رئوس گراف G را یک مجموعه‌ی « k -آلوده» می‌گوییم اگر و فقط اگر حداکثر k یال از گراف G را آلوده کند. یک یال زمانی آلوده می‌شود که حداقل یکی از دو رأس انتهاییش در مجموعه‌ی W قرار گیرد. در این مسئله ما می‌خواهیم الگوریتمی برای یافتن مجموعه‌ی k -آلوده‌ی ماکسیمم (که تعداد رئوسش بیشینه باشد) پیدا کنیم. برای این کار الگوریتم حریصانه‌ای پیشنهاد شده است که به این صورت عمل می‌کند:

ابتدا رأس با درجه‌ی مینیمم را انتخاب می‌کند و آن را در مجموعه‌ی W قرار می‌دهد. سپس در هر مرحله رئوس W و یالهای متصل به آنها را از گراف G حذف می‌کند و رأس با درجه‌ی مینیمم از گراف باقیمانده را به W اضافه می‌کند. این کار را تا زمانی ادامه می‌دهد که مجموعه‌ی W ، k -آلوده بماند. بدیهی است اگر با اضافه شدن رأس v ، مجموعه‌ی W دیگر k -آلوده نبود، الگوریتم $W - v$ را به عنوان جواب اعلام می‌کند.

اکنون اگر مجموعه‌ی k -آلوده‌ی ماکسیمم را با OPT و خروجی الگوریتم حریصانه را با U نشان دهیم، ثابت کنید $|U| \geq \lfloor \frac{1}{3} \times |OPT| \rfloor$. یعنی الگوریتم حریصانه خیلی هم بد عمل نمی‌کند.

^۱ هر صف دقیقاً یک جلو دارد که آن‌هم نزدیک‌ترین مکان به تابلوی ایستگاه است!