

به نام خدای مهربانی‌ها

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون میان دوره‌ای درس الگوریتم‌ها

شنبه ۲۵ تیرماه ۱۳۹۰

مدت آزمون: ۲۱۰ دقیقه

احمدی‌نژاد، بابایی، احمدی‌نژاد، جبل‌عاملی، احمدی‌نژاد، زادی‌مقدم

مسئله‌ی اول. ۱۵ نمره

روابط بازگشتی زیر را حل کنید و مرتبه آن‌ها را بدست آورید:

a) $T(n) = T(\alpha_1 n) + T(\alpha_2 n) + \dots + T(\alpha_k n) + O(n)$

$k > 1, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k > 0$

b) $T(n) = 4T\left(n^{\frac{1}{3}}\right) + \lg^2 n$

c) $T(n) = T(n-1) + \sqrt{n}$ (Compute Θ)

مسئله‌ی دوم. ۲۰ نمره

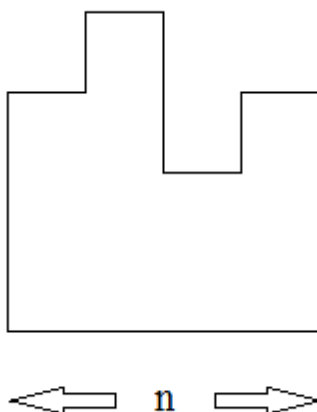
یک ماشین k -خفن ماشینی است که اگر k عنصر متوالی از یک آرایه را به آن بدهیم آن را در $O(1)$ مرتب می‌کند.

الف) ثابت کنید به ازای $k = C, C > 1$ (یعنی یک عدد ثابت) مرتب کردن یک آرایه با اندازه n بوسیله یک ماشین k خفن در بدترین حالت از $\Omega(n^2)$ می‌باشد. دقت کنید در این قسمت و قسمت بعد ما به خود آرایه دسترسی نداریم و فقط می‌توانیم ماشین را کنترل کنیم (۱۰ امتیاز).

ب) ثابت کنید که به ازای $k = \frac{n}{c}$ مرتب کردن یک آرایه به طول n از $O(c^2)$ است (۱۰ امتیاز).

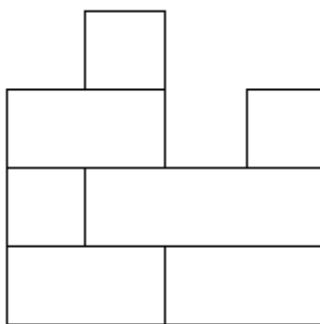
مسئله‌ی سوم. ۱۰ نمره

حسن یک قطعه چوب باریک و دراز به عرض ۱ و طول l دارد و می‌خواهد بوسیله این چوب یک کاردستی بسازد. نمونه‌ای از شکل کاردستی که حسن می‌خواهد درست کند در شکل زیر آمده است.



می‌دانیم عرض کاردستی حسن n است و ارتفاع i امین برآمدگی a_i است. برای مثال در شکل فوق a_i ها به این شکل هستند $(3, 4, 2, 3)$.

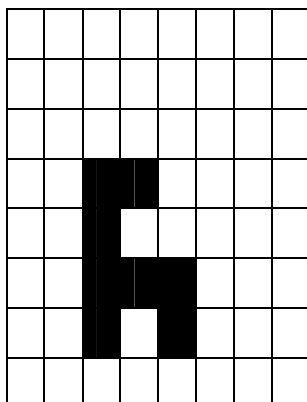
اما او می‌خواهد با استفاده از قطعات افقی این شکل را بسازد. مانند شکل زیر:



در شکل فوق از ۷ قطعه چوب استفاده شده است. الگوریتمی از $O(n)$ ارائه دهید که کمترین تعداد قطعه چوب برای ساختن این کاردستی را محاسبه کند (دقت کنید شکل فوق یک برش بهینه را نشان نمی‌دهد و می‌توان شکل را با ۵ قطعه نیز پوشاند). l بقدر کافی بزرگ می‌باشد. لازم است شبه کد پیدا کردن این مقدار را بنویسید و در مورد الگوریتم خود و درستی آن به زبان فارسی توضیح دهید.

مسئله‌ی چهارم. ۱۰ نمره

یک جدول $2^n * 2^n$ داریم که می‌دانیم یک n -پاره در درون آن مخفی شده است. یک n -پاره یک شکل به هم پیوسته با n مربع می‌باشد. نمونه‌ای از یک ۸-پاره در زیر آمده است. دقت کنید که هر مربع n -پاره باید با حداقل یکی دیگر از مربع‌های n -پاره ضلع مشترک داشته باشد.



می‌خواهیم این n -پاره را پیدا کنیم، اما تنها می‌توانیم سوالاتی به این شکل بپرسیم: یک زیرمربع را انتخاب کنیم و بپرسیم که آیا یکی از مربع‌های n -پاره درون این زیرمربع هست یا نه. الگوریتمی ارائه دهید که با $O(n)$ سوال این چندپاره را بیابد.

مسئله‌ی پنجم. ۲۵ نمره

یک درختیپ داده ساختاری است درختی که هر گره در آن دارای دو کلید k و p می‌باشد. در واقع این درخت یک درخت دودویی است که بر اساس کلید k خواص یک درخت دودویی جستجو را دارد و براساس کلید دیگر یک هیپ است. در این سوال فرض می‌کنیم که درختیپمان یک هیپ بیشینه است. یعنی مقدار p ریشه مقدار بیشینه را دارد. دقت کنید شرط تقریباً کامل بودن درخت هیپ در این داده ساختار لزوماً رعایت نمی‌شود. اصولاً از این داده ساختار برای ساختن درخت‌های دودویی جستجو با ارتفاع $O(\lg n)$ استفاده می‌شود. در واقع کلید‌های p ترتیب وارد کردن عناصر را درون یک درخت دودویی جستجو مشخص می‌کنند. فرض ما در این سوال این است که درختیپ‌ها ارتفاع متوسط $\Theta(\lg n)$ دارند.

شما در این سوال می‌توانید یکی از دو قسمت زیر را انتخاب کرده و به آن پاسخ دهید:

الف) رویه insert یک عنصر x با دو کلید k و p را پیاده‌سازی کنید (شبه‌کد) و همچنین درباره عملکرد شبه‌کدتان توضیح دهید. الگوریتم پیاده‌سازی شده در حالت متوسط باید از مرتبه زمانی $\Theta(\lg n)$ باشد (۱۵ امتیاز).

ب) رویه ادغام یا merge دو درختیپ T_1 و T_2 را با مرتبه زمانی متوسط $O(n)$ پیاده‌سازی کنید (شبه‌کد). n را مجموع رووس درون T_1 و T_2 در نظر بگیرید. در مورد نحوه عملکرد و درستی شبه‌کدتان توضیح دهید (۲۵ امتیاز).

مسئله‌ی ششم. ۲۵ نمره

در این مسئله n کلاه داریم که زیر برخی از آنها یک سکه طلا قرار دارد. علی در هر مرحله مجموعه‌ای از کلاه‌ها را انتخاب می‌کند و از ما می‌پرسد که آیا در این مجموعه کلاهی هست که زیر آن سکه طلا باشد. ما می‌توانیم به او یکی از سه پاسخ زیر را بدهیم:

الف) بله

ب) خیر

ج) نمی‌دانیم

همانطور که از پاسخ‌ها مشخص است خود ما هم نمی‌دانیم که زیر کدام کلاه‌ها سکه قرار دارد. علی‌همینطور از ما سوال می‌پرسد و ما بعد از هر سوال به او یکی از سه پاسخ فوق را می‌دهیم. اما بعد از هر پاسخ جواب درست به ما گفته می‌شود. چگونه می‌توان به این سوال‌ها پاسخ داد بدون اینکه بیش از $\frac{n}{3}$ بار اشتباه نکنیم و هم چنین بیش از $\frac{3n}{2}$ بار از پاسخ "نمی‌دانیم" استفاده نکنیم. دقت کنید که ما اطلاعی در مورد سوالات آینده نداریم.

«موفق باشید!»