باسمه تعالی

هجدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر

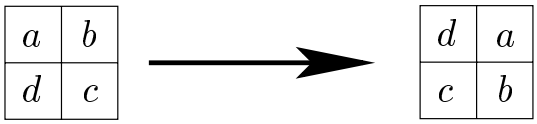
آزمون نظری دوم

پنج‌شنبه ۱۷ مرداد ۱۳۸۷

زادی‌مقدّم — وقت: چهار ساعت و نیم

مسئله‌ی اول: چرخونک ..... ۳۰ نمره

یک جدول اولیه و یک جدول ثانویه $n \times n$ با اعداد $1, 2, \ldots, n^2$ داده شده است. در هر عمل می‌توان ۴ خانه‌ی مجاور که به شکل یک مربع 2×2 هستند را انتخاب کنیم و به صورت زیر (یک واحد چرخش ساعت‌گرد) اعداد این ۴ خانه را جابجا کنیم.



شرط لازم و کافی برای این‌که جدول اولیه را بتوان با تعدادی از این اعمال به جدول ثانویه تبدیل کرد چیست؟

مسئله‌ی دوم: تا می‌تونی نپرس ..... ۳۰ نمره

یک مکعب $n \times n \times n$ داده شده است. هر کدام از n^3 خانه‌ی این مکعب را می‌توان با سه مؤلفه‌ی x، y و z به شکل یک سه‌تایی (i, j, k) نشان داد که $1 \leq i, j, k \leq n$ می‌باشند. می‌دانیم که اعداد تمام n^2 خانه‌ای که مؤلفه‌ی i در آن‌ها ۱ است، همان مجموعه‌ی اعداد $1, 2, \ldots, n^2$ است. این گزاره برای n^2 خانه‌ای که مؤلفه‌ی i در آن‌ها ۲ است نیز درست می‌باشد. و به همین شکل برای ۳، ۴، ... و n نیز این گزاره را داریم. برای دو مؤلفه‌ی دیگر نیز این گزاره درست است. یعنی مثلاً اعداد تمام n^2 خانه‌ای که مؤلفه‌ی j (و یا k) در آن‌ها برابر یک عدد ثابت است نیز همان مجموعه‌ی اعداد $1, 2, \ldots, n^2$ است. ثابت کنید می‌توان با پرسیدن عدد حداکثر $n^3 - 3n + 2$ خانه از جدول، کل جدول را به طور یکتا تعیین کرد.

مسئله‌ی سوم: جستجو در فضای شیطنت ..... ۴۰ نمره

عدد x و دنباله‌ی اعداد $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ داده شده است. ففلی می‌خواهد ببیند که x در این دنباله وجود دارد یا خیر. برای این کار از الگوریتم جستجوی دودویی [1] استفاده می‌کند. این الگوریتم به این صورت کار می‌کند که اگر بخواهیم در زیردنباله‌ی $a_i \leq a_{i+1} \leq \ldots \leq a_j$ به دنبال x بگردیم در ابتدا x را با $a_{\lfloor (i+j)/2 \rfloor}$ مقایسه کرده و بر اساس جواب به یکی از دو زیرمسئله‌ی بازگشتی کوچکترِ $(i, \lfloor (i+j)/2 \rfloor - 1)$ و یا $(\lfloor (i+j)/2 \rfloor + 1, j)$ می‌رویم و یا در صورت برابری به الگوریتم پایان می‌دهیم.

به خاطر شیطنت‌های خاص ففلی، او در مقایسه‌ی x با هر a_i ممکن است اشتباه کند اما می‌دانیم که به ازای هر a_i او در عمر خود در مقایسه‌ی x با a_i حداکثر یک بار اشتباه می‌کند. ففلی الگوریتم فوق را k بار تکرار می‌کند. کمترین مقدار k چند است به طوری‌که مطمئن باشیم در لااقل یک بار از این k بار ففلی به جواب درست می‌رسد.

«موفّق باشید!»

---

[1] Binary Search