

مسئله‌ی اول: دوستی‌های ماندگار ۳۰ نمره

تعاریف زیر در گراف‌های جهت‌دار و بدون دور^۱، ارائه شده است:

- رأس v ، رأس u را «دوست دارد» اگر و فقط اگر یک مسیر جهت‌دار از v به u موجود باشد.
 - دو رأس v_1 و v_2 با هم «قهر» هستند، اگر و فقط اگر نه v_1 را دوست داشته باشد، نه v_2 را.
 - «عرض» گراف سائز بزرگ‌ترین زیرمجموعه از رئوس است که اعضای آن زیرمجموعه دوه‌دو با هم قهر باشند.
- گراف جهت‌دار و بدون دور G با n رأس و e یال داده شده است. می‌دانیم عرض G برابر w است. الگوریتمی از زمان اجرای $O(n^3)$ ارائه کنید که با گرفتن گراف G ، گراف G' را به ما برگرداند که شرایط زیر را داشته باشد.
- تعداد رئوس G' حداکثر n باشد.
 - تعداد یال‌های G' کم‌تر از nw باشد.
 - به‌ازای هر دو رأس u و v که بگیریم، u ، v را در G' دوست داشته باشد اگر و فقط اگر در G آن را دوست دارد.
- الگوریتم خود را تحلیل و اثبات کنید.

مسئله‌ی دوم: قالب‌های مکعبی ۳۰ نمره

ثابت کنید در یک مکعب $k^3 \times k^3 \times k^3$ می‌توان k^2 زیرمکعب (مربع) با اندازه‌های مختلف یافت که هیچ دو تایی از آن‌ها اشتراک ندارند.

مسئله‌ی سوم: جستجو ۴۰ نمره

یک دنباله‌ی A از اعداد مثبت متفاوت به طول n به شما داده شده است. یک ماشین کمکی داریم که در یک حرکت بزرگترین زیردنباله‌ی یکنوای^۲ را در A پیدا کرده و با حذف این زیردنباله آن‌را در دنباله‌ی B ذخیره می‌کند. در ضمن دو متغیر n و m هم داریم که نشان‌دهنده‌ی طول A و B هستند. این ماشین پس از عملیاتش مقدار این دو متغیر را نیز درست نگه می‌دارد. مثلاً اگر آرایه‌ی ما در ابتدا $A = (۴, ۵, ۳, ۱۰, ۲۰, ۷, ۹, ۶, ۵.۵, ۴.۵, ۲)$ باشد، خروجی ماشین به صورت $A = (۴, ۵, ۳, ۲۰, ۷)$ ، $n = ۵$ ، $B = (۱۰, ۹, ۶, ۵.۵, ۴.۵, ۲)$ و $m = ۶$ است. تکرار این عمل ما را به دنباله‌های $A = (۳, ۷)$ و $B = (۴, ۵, ۲۰)$ با $n = ۲$ و $m = ۳$ می‌رساند.

اگر طول زیردنباله‌ی حذف‌شده k باشد زمان اجرای این عمل $O(k)$ خواهد بود. به شما در ابتدا $O(n)$ زمان داده شده است تا خود را برای مرحله‌ی بعدی که جستجو است آماده کنید. در مرحله‌ی دوم در هر سوال به شما عدد x داده می‌شود و شما باید بفهمید که آیا x جز n عدد اولیه در آرایه‌ی A بوده است یا خیر. زمان اجرای شما به ازای هر ورودی باید $O(\sqrt{n} \lg(n))$ باشد.

«پاینده و پوینده باشید!»

^۱DAG
^۲زیردنباله‌ی صعودی یا نزولی