

باسمه تعالی

## دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

### آزمون نهایی گراف

وقت: ۳ ساعت و ۴۵ دقیقه

مدرس: رضایی، جبل عاملی

جمعه ۳۰ تیر ۱۳۹۱

#### مسئله اول. آق فرهاد در هنگ کنگ ..... ۱۰ امتیاز

یک جدول  $n \times n$  را با درایه‌های صفر و یک پر کرده‌ایم به طوری که در هر  $n$  خانه از جدول که هیچ دوتایی از آن‌ها هم سطر یا هم ستون نیستند، حداقل یک درایه‌ی ۱ وجود دارد. ثابت کنید  $i$  سطر و  $j$  ستون از جدول وجود دارند که محل تقاطع این سطرها و ستون‌ها همه ۱ است و داریم:  $i + j \geq n + 1$ .

#### مسئله دوم. شوالیه رنگی ..... ۲۵ امتیاز

فرض کنید  $G$  گرافی  $k$  بخشی کامل باشد و در هر بخش  $l$  راس وجود داشته باشد. الف) ثابت کنید رنگ‌آمیزی تامی با  $k \times l$  رنگ برای  $G$  وجود دارد. (۱۰ امتیاز) ب) عدد رنگی یالی  $G$  را بیابید. (۱۵ امتیاز)

#### مسئله سوم. سوال گمنام ..... ۱۵ امتیاز

بزرگترین  $d$  را پیدا کنید که برای هر گراف  $G$  با قطر  $d$ ، داشته باشیم:  $\kappa'(G) = \delta(G)$

#### مسئله چهارم. پارک جنگلی ..... ۲۵ امتیاز

تعریف: به افراز راسی  $V_1, \dots, V_n$  از گراف  $G$  یک پوشش درختی می‌گوییم هرگاه زیرگراف القایی روی هر  $V_i$ ،  $1 \leq i \leq n$  یک درخت باشد. عدد درختی گراف  $G$ ،  $a(G)$ ، کمترین عدد طبیعی  $k$  است که برای گراف  $G$  یک پوشش درختی  $V_1, V_2, \dots, V_k$  داشته باشیم. ثابت کنید:

$$a(G) \leq 1 + \left\lfloor \frac{\max \delta(G')}{2} \right\rfloor$$

که در این نابرابری ماکسیمم روی تمام زیرگراف‌های القایی  $G'$  از  $G$  گرفته می‌شود.

#### مسئله پنجم. تطابق خیکولچه ..... ۲۵ امتیاز

فرض کنید  $n$  عدد طبیعی  $d_1, d_2, \dots, d_n$  داده شده است. ثابت کنید این اعداد دنباله درجات یک گراف ساده‌ی دارای تطابق کامل است اگر و فقط اگر هم  $d_1, d_2, \dots, d_n$  و هم  $d_1 - 1, d_2 - 1, \dots, d_n - 1$  دنباله درجات یک گراف ساده باشند.

*Erdos: "Among all those fields that I studied, graph theory was the one I enjoyed the most"*