

آزمون نظری دوم

پنجشنبه ۲۷ تیر ۱۳۸۷

زادی مقدم

وقت: ۵ ساعت

مسئله‌ی اول: گرافیابی ۲۰ نمره

ففلی یک گراف n -راسی روی کاغذ کشیده است و به مملى نشانى نمى‌دهد. مملى در هر لحظه دو راس را انتخاب مى‌کند و ففلى فاصله‌ى آن‌ها را به مملى مى‌گوید. کمترین تعداد سوال که مملى باید بپرسد تا از شکل گراف آگاه شود بر حسب n چند است؟

مسئله‌ی دوم: ماتریس کم‌تنوع ۳۵ نمره

یک ماتریس $n \times n$ که با اعداد $1, 2, \dots, n^2$ پر شده است داریم. رتبه‌ی یک درایه در این ماتریس برابر تعداد اعداد بزرگتر از این درایه در کل سطر و ستونش مى‌باشد. بنابراین رتبه‌ی هر درایه عددی بین 0 تا $2n - 2$ است. تعداد رتبه‌های مختلف که در این ماتریس مشاهده مى‌شود برابر تنوع آن است. کم‌ترین تنوع در بین همه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های متفاوت را $T(n)$ بنامید. ثابت کنید $T(ab) \leq T(a)T(b)$.

مسئله‌ی سوم: جداسازی ۴۵ نمره

گراف بدون جهت G با n^2 راس به این صورت ساخته شده است که رئوس دوتایی‌های (a, b) به ازای $1 \leq a, b \leq n$ می‌باشند. هر راس (a, b) به رئوس $(a, b+1), (a, b-1), (a+1, b), (a-1, b)$ (در صورت وجود این رئوس) وصل است. یعنی درجه‌ی هر راس حداکثر ۴ خواهد شد. مجموعه‌ی S از رئوس داده شده است و مى‌دانیم $|S| < n^2/2$. ثابت کنید تعداد یال‌های بین مجموعه‌ی S و بقیه‌ی رئوس گراف $\Omega(\sqrt{|S|})$ است.

«موفق باشید!»