


باسمه تعالی
دوره‌ی آموزشی المپیاد کامپیوتر
امتحان نظری اصلی سوم
چهارشنبه ۱۸ مردادماه ۱۳۸۵

میرجلالی، سیدی

وقت: ۵ ساعت

مسئله‌ی اول: سوسک‌ها ۲۵ نمره

n عدد سوسک اهل حال جشن تولد گرفته بودند و دوریک میز دایره‌ای (با فاصله‌ی مساوی از هم) نشسته بودند. ما هم وقتی متوجه شدیم شروع کردیم به کشتن‌شان. سوسک‌ها چون در مهمانی حسابی خورده بودند حال پاشدن هم نداشتند و از سر جایشان بلند نشدند (تا آخر مسئله هم بلند نخواهند شد). در ابتدا کشتن سوسک‌ها به این روش بود که یک سوسک را به صورت تصادفی انتخاب می‌کردیم و با یک قاشق به او سم می‌خوراندیم^۱. ولی این کار پس از مدتی خسته کننده شد و یک اسپری حشره‌کش «» خریدیم تا با آن کار را ادامه دهیم. با هر بار استفاده از اسپری، k سوسک متوالی آلوده می‌شوند و اگر زنده باشند می‌میرند.

خوب، خصوصیت یک المپیاد کامپیوتری (یا بهتر بگوییم یک Computer Scientist) چیست؟ این که می‌خواهد با کمترین تعداد استفاده از اسپری، همه‌ی سوسک‌های باقی‌مانده را کشته باشد. راه حل درست و ساده‌ای به ذهنمان نرسید از این رو الگوریتم زیر را ارائه دادیم:

(۱) از یک سوسک دلخواه در دایره شروع کن و در جهت ساعت‌گرد روی دایره حرکت کن.

(۲) تا وقتی سوسک زنده‌ای باقی‌مانده، حلقه‌ی زیر را تکرار کن:

(a) روی دایره برو جلو تا یک سوسک زنده ببینی.

(b) با اسپری، آن سوسک و $k-1$ سوسک بعدش را آلوده کن.

(c) صبر کن تا سوسک‌های آلوده شده‌ی زنده بمیرند.

ثابت کنید این الگوریتم حداکثر یک بار بیشتر از روش بهینه از اسپری استفاده می‌کند.

مسئله‌ی دوم و سوم: کاشتیش سبز نشد ۷۵ نمره

می‌خواهیم n کار j_1, j_2, \dots, j_n را بر روی یک پردازنده انجام دهیم. زمان لازم برای انجام هر کاریک واحد است. برای هر کار تعدادی بازه داریم که باید آن کار را در یکی از آن بازه‌ها انجام دهیم. طول تمامی این بازه‌ها و زمان شروع و پایان آن‌ها عددی صحیح است. می‌توانیم انتخاب کنیم که یک کار را در چه زمانی انجام دهیم، ولی بایستی زمان انجام یک کار در یکی از بازه‌های مربوط به آن قرار گیرد.

می‌دانیم که پردازنده نمی‌تواند دو کار را به صورت همزمان انجام دهد. هنگامی که پردازنده می‌خواهد کاری انجام دهد باید روشن شود. هنگامی که پردازنده کاری را به پایان رساند، اگر کاری دیگری باید در همان لحظه شروع شود، اجرای آن را شروع می‌کند. در غیر این صورت پردازنده به طور خودکار خاموش می‌شود.

هدف ما در این مسئله این است که همه‌ی کارها را انجام دهیم به طوری که تعداد دفعاتی که مجبور می‌شویم پردازنده را روشن کنیم کمینه شود.

^۱ شاید پرسید خوب چرا با یک دمپایی نمی‌زدیم توی سرش. خوب اونم می‌شه!

مسئله‌ی A

می‌دانیم که تعداد بازه‌های مربوط به هر کار حداکثر ۲ است.

مسئله‌ی B

می‌دانیم که تعداد بازه‌های مربوط به هر کار حداکثر ۲ است و طول هر یک از این دو بازه، ۱ واحد زمانی است.

مسئله‌ی C

می‌دانیم که بازه‌های مربوط به کارها همگی مجزا هستند. (یعنی هیچ دو بازه‌ای از هیچ دو کاری اشتراک ندارند.)

مسئله‌ی D

مسئله در حالت کلی. (هیچ محدودیتی روی طول و تعداد بازه‌ها وجود ندارد.)

الف) ثابت کنید که اگر الگوریتمی با زمان چندجمله‌ای وجود داشته باشد که مسئله‌ی A را حل کند، الگوریتمی با زمان چندجمله‌ای برای مسئله‌ی D نیز وجود دارد. (۳۰ نمره)

ب) ثابت کنید که اگر الگوریتمی با زمان چندجمله‌ای وجود داشته باشد که مسئله‌ی C را حل کند، الگوریتمی با زمان چندجمله‌ای برای مسئله‌ی B نیز وجود دارد. (۳۰ نمره)

ج) ثابت کنید که اگر الگوریتمی با زمان چندجمله‌ای وجود داشته باشد که مسئله‌ی B را حل کند، الگوریتمی با زمان چندجمله‌ای برای مسئله‌ی C نیز وجود دارد. (۱۵ نمره)

مسئله‌ی چهارم: باز هم مسئله؟! ° نمره

اگر مسئله‌ی دوم و سوم را حل کرده‌اید می‌توانید با خوشحالی جلسه را ترک کنید، در غیر این صورت سعی کنید آن‌ها را حل کنید.

موفق باشید.