

باسمه تعالی

شانزدهمین دوره‌ی آموزشی المپیاد کامپیوتر

امتحان نظری اصلی پنجم

چهارشنبه اول شهریورماه ۱۳۸۵

وقت: ۴:۳۰ ساعت

زادی‌مقدم، اوئیس قرن

مسئله‌ی اول: مهره‌ها ۳۰ نمره

دو مسئله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

مسئله‌ی A: گراف G و تعدادی مهره روی بعضی رئوس آن داده شده است. می‌خواهیم مهره‌ها را روی یال‌ها طوری حرکت دهیم که زیرگراف القایی رئوسی که شامل حداقل یک مهره‌اند هم‌بند شده و مجموع حرکات مهره‌ها نیز کمینه بشود.

مسئله‌ی B: گراف دوبخشی H که مجموعه‌ی رئوس دو بخش آن X و Y می‌باشند داده شده است. می‌خواهیم کوچکترین زیرمجموعه‌ی X مانند S را پیدا کنیم به طوری که $N(S) = Y$.

ثابت کنید اگر برای مسئله‌ی A الگوریتم چندجمله‌ای وجود داشته باشد برای مسئله‌ی B نیز الگوریتم چندجمله‌ای وجود دارد.

مسئله‌ی دوم: رنگ کردن مربع‌ها ۳۵ نمره

n مربع به ضلع واحد طوری در صفحه قرار گرفته‌اند که اضلاع‌شان موازی محورهای مختصات بوده و مختصات طولی یا عرضی رئوس هیچ دو مربعی برابر نیست. یک عدد k به شما داده شده است و به شما گفته شده که هیچ $k + 1$ مربعی وجود ندارند که هر دوتایشان با هم اشتراک داشته باشند^۱. ثابت کنید می‌توان این مربع‌ها را با حداکثر $k - 1$ رنگ، طوری رنگ کرد که رنگ هر دو مربعی که با هم اشتراک دارند متفاوت باشد.

مسئله‌ی سوم: زمان‌بندی پایدار ۳۵ نمره

تعدادی کار و تعدادی پردازنده داریم. برای هر کار، تعدادی پردازنده‌ی مجاز وجود دارد. زمان اجرای کار i ام روی پردازنده‌های مجازش t_i و روی پردازنده‌های غیرمجازش بی‌نهایت است. یک زمان‌بندی عبارت است از پخش کارها روی پردازنده‌ها و انجام کارهای هر پردازنده به یک ترتیب خاص و پشت‌سرهم. در یک زمان‌بندی، به کار i «ناراضی» می‌گوییم اگر با ثابت نگه داشتن بقیه کارها و بردن کار i به یک پردازنده‌ی دیگر (و نه لزوماً هر پردازنده‌ی دیگر) و انجام آن کار پس از اجرای بقیه کارهای آن پردازنده‌ی دیگر، زمان پایان کار i کمتر شود. به یک زمان‌بندی «پایدار» می‌گوییم اگر و فقط اگر در آن هیچ کاری ناراضی نباشد. هزینه‌ی یک زمان‌بندی عبارت است از مقدار زمانی که طول می‌کشد تا همه‌ی پردازنده‌ها دست از کار بکشند. برای هر $n > 10$ (که n تعداد پردازنده‌هاست)، مثالی از سیستم بالا با یک زمان‌بندی پایدار بنویسید که هزینه‌اش حداقل $\lceil \lg n \rceil$ برابر هزینه‌ی زمان‌بندی بهینه (و نه لزوماً پایدار) باشد.

^۱ می‌گوییم دو مربع اشتراک دارند اگر و فقط اگر حداقل یک نقطه‌ی مشترک روی صفحه داشته باشند.