باسمه‌تعالی

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نهایی ترکیبیات

پنج شنبه ۲۲ تیر ۱۳۹۱ — وقت: ۵ ساعت

مسأله اول. حرکت خیکوله ..... ۱۰ امتیاز

خیکوله در مبدا مختصات قرار گرفته است. او در n مرحله حرکات زیر را انجام می‌دهد:
در مرحله i ام $(1 \leq i \leq n)$ او باید دقیقا i واحد در یکی از چهار جهت (بالا، راست، پایین و چپ) حرکت کند.
در صورتیکه خیکوله بتواند در انتها به خانه (x, y) برسد، این خانه را علامت می‌زنیم. چه خانه‌هایی علامت زده می‌شوند؟

مسأله دوم. افراز..... ۱۵ امتیاز

فرض کنید $P(n)$ تعداد افرازهای عدد طبیعی n باشد، ثابت کنید :

$$P(n) \leq \frac{P(n-1) + P(n+1)}{2}$$

مسأله سوم. بستنی‌های خیکولچه ..... ۲۵ امتیاز

الف) ضریب x^n در تابع مولد$(\frac{1}{1-x})^r$ چند است؟(۱۰ امتیاز)
ب) خیکولچه از بقالی ۱۳۹۱ عدد بستنی خریده است. این مغازه ۶ نوع بستنی دارد. می‌دانیم :
- تعداد بستنی‌های "سالار" و "میوه ای" زوج تاست.
- تعداد بستنی‌های "مگنوم" حداکثر ۳ تاست.
- از هرکدام از بستنی‌های "کیم" و "یخی" حداکثر یکی داریم.
- تعداد بستنی‌های "فالوده‌ای" مضرب ۴ است.

خیکولچه به چند طریق مختلف می‌تواند بستنی‌ها را خریده باشد؟(۱۵ امتیاز)

مسأله چهارم. پرتوی منحصر به فرد ..... ۲۰ امتیاز

تعدادی آینه داریم که مختصات آنها بصورت زیر تعریف می‌شود.

به ازای هر $i(۰ \leq i \leq n-۱)$ آینه‌ی iام خطی است که دو نقطه‌ی زیر را به هم وصل می‌کند :

$$(۲^i - ۱, ۲^i), (۲^{i+۱} - ۱, ۲^i)$$

همچنین روی محور هاx نیز آینه ای به طول بینهایت وجود دارد. میخواهیم پرتویی را از نقطه مبدا بتابانیم که به هر آینه حداکثر یکبار برخورد کند و در انتها به نقطه $(۲^n - ۱, ۰)$ برسد. پرتو می‌تواند به آینه ای که روی محور هاx هست به تعداد دلخواه برخورد کند.
ثابت کنید که دقیقا یک زاویه برای تاباندن پرتو با خاصیت گفته شده وجود دارد.

مسأله پنجم. اعداد رمزی ..... ۳۰ امتیاز

تعریف:مجموعه‌ی $A_n = \{۱, ۲, \ldots n\}$ داده شده است. هر زیر مجموعه‌ی سه عضوی از آن را به یکی از دو رنگ آبی یا قرمز رنگ می‌کنیم. به $B \subset A_n$ خوب می‌گوییم اگر تمام زیر مجموعه‌های سه عضوی آن همرنگ باشند.
الف) ثابت کنید برای هر دو عدد طبیعی همانند a, b ، nای وجود دارد که در A_n یا زیرمجموعه‌ی aتایی خوبه به رنگ آبی و یا bتایی خوب به رنگ قرمز وجود دارد.(کوچکترین n با این خاصیت را $R_۳(a, b)$ می‌نامیم.)(۱۵ امتیاز)
ب)ثابت کنید: (۱۵امتیاز)

$$R_۳(a, b) \geq (a-۱) \times (R_۳(a, \lfloor \frac{b}{۲} \rfloor) - ۱) \ + \ ۱$$