به نام یگانه هستی بخش

دوره‌ی آموزشی المپیاد کامپیوتر

داینامیک

تمرین اول: کارخانه چوب‌بری عجیب ..... $O(n^2)$

$d(i)$ را کمترین مقدار پول مورد نیاز برای برش یک قطعه چوب به k قسمت در نظر می‌گیریم. داریم:

$$d(i) = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \min_{j=1}^{i}\{c_j + d(i-j)\} & 0 < i \leq n \end{cases}$$

که پر کردن $d(i)$ در $O(n^2)$ امکان‌پذیر می‌باشد. جواب مسئله $d(n)$ می‌باشد.

تمرین دوّم: جواب معما ..... $O(n^3)$

$d(i,j,x,k)$ را بیشترین مقدار شکلات که فرشته می‌تواند با ترکاندن گوی‌های i ام تا j ام به دست آورد اگر x تا گوی با رنگ k ام بعد از گوی j ام مانده باشد، تعریف می‌کنیم (دقت کنید این جدول n^3 خانه مجاز دارد. حال ایده پر کردن جدول داینامیک ما این است که هر صفحه که عناصر i و j آنها برابر است را با هم پر می‌کنیم. به این ترتیب که به ازای هر اولاً آخرین دسته رنگی در این بازه را که فرض می کنیم تعداد آنها l تا است را کنار گذاشته و برای هر $i < p < j - l$ می‌آییم خانه‌هایی که رنگ آنها با رنگ خانه p ام برابر است را پر می‌کنیم، یعنی $d(i,j,*,p)$ (چه جوری پر می‌کنیم؟) . در این صورت هزینه پر کردن هر صفحه (i,j) از جدول داینامیکه ما $O(n+(j-i))$ که همان $O(n)$ می‌شود. و در کل چون $O(n^2)$ صفحه به فرم (i,j) داریم در کل جدول داینامیک ما در $O(n^3)$ پر می‌شود.

تمرین سوّم: دنباله‌های دودویی ..... $O(nL)$

$d(i,j)$ را تعداد رشته‌های دودویی به طول i که تعداد ۱ های آنها کمتر یا مساوی j می‌باشد، تعریف می‌کنیم.

$$d(i,j) = \begin{cases} 1 & i = 0 \ or \ j = 0 \\ d(i-1,j) + d(i-1,j-1) & 0 < i,j \leq n \end{cases}$$

که پر کردن $d(i,j)$ در $O(n^۲)$ امکان‌پذیر می‌باشد. حال تابع $\text{find}(k,i,j)$ می‌بیند که k امین عنصر در بین دنباله‌های به طول i که کمتر مساوی j تا ۱ دارند کدام است. در این تابع اگر $d(i-۱,j) \leq k$ باشد یعنی عنصر اول این دنباله ۱ است و $\text{find}(k-d(i-۱,j), i-۱, j-۱)$ صدا زده می‌شود و اگر $d(i-۱,j) > k$ باشد، یعنی عنصر اول ۰ است و $\text{find}(k, i-۱, j)$ صدا زده می‌شود. این تابع در $O(n)$ دنباله مورد نظر را پیدا می‌کند، زیرا در هر بار صدا زدن مقدار i یکی کم می‌شود و عنصر $n-i+۱$ ام دنباله مشخص می‌شود. در ابتدا نیز باید $\text{find}(k,n,L)$ صدا زده شود.

تمرین چهارم: پیشوندی از زیررشته‌ها ..... $O((n+m)L)$

$d(i)$ را امکان ساخت پیشوندی به طول i از رشته S در نظر بگیرید. به طبق $d(۰) = true$ است. به ازای هر i و هر زیررشته j، فرض می‌کنیم طول این زیر دنباله l_j باشد. اگر l_j عنصر آخر این پیشوند با این زیررشته برابر بود و همچنین $d(i-l_j)$ نیز $true$ بود، مقدار $d(i)$ درست می‌شود. بوضوح برای پر کردن هر $d(i)$، $O(n+m)$ زمان مصرف می‌شد (چک کردن رشته‌ها و n رشته باید چک شود). در نتیجه در کل $O((n+m)L)$ زمان برای پر کردن کل $d(i)$ ها لازم است.

تمرین پنجم: شیر فروشی ..... $O(nw)$

$d(i,j)$ را کمترین تعداد پیمانه برای کشیدن i لیتر شیر با j پیمانه اول در نظر می‌گیریم. همچنین $d'(i,j)$ را کمترین تعداد پیمانه برای کشیدن i لیتر شیر با j پیمانه اول که پیمانه j ام انتخاب شود، در نظر می‌گیریم. داریم:

$$d(i,j) = \begin{cases} ۰ & i = ۰ \ or \ j = ۰ \\ \min\{d(i,j-۱), d'(i-a_j,j) \ (if \ i-a_j \geq ۰)\} & ۰ < i,j \leq n \end{cases}$$

$$d'(i,j) = \begin{cases} ۰ & i = ۰ \ or \ j = ۰ \\ \min\{d(i,j-۱)+۱, d'(i-a_j,j) \ (if \ i-a_j \geq ۰)\} & ۰ < i,j \leq n \end{cases}$$

پر کردن این دو آرایه در کنار هم و در زمان $O(nw)$ قابل انجام است. همچنین جواب نهایی مسئله $d(w,i)$ می‌باشد.

تمرین ششم: بسته‌بندی کمینه ..... $O(nP^۲)$

$d(i,j,k)$ کمترین تعداد جعبه برای بسته‌بندی i کالای اول به طوری که در دو جعبه آخر در یکی j کیلو و در دیگری k کیلو جای خالی باقی بماند. برای پرکردن خانه‌های این جدول، می‌آییم از خانه‌هایی که جوابشان بدست آمده جواب خانه‌هایی که بدست نیامده‌اند را بازبینی می‌کنیم. فرض کنیم جواب خانه (i,j,k) را می‌دانیم. حال جنس $i+۱$ ام یا در

جعبه اول می‌آید که در این حالت خانه $(i+1, j+w_{i+1}, k)$ بازبینی می‌شود و یا در جعبه دوم می‌آید که خانه $(i+1, j, k+w_{i+1})$ بازبینی می‌شود. در هر دو حالتی که گفته شد اگر $j+w_{i+1}$ ($k+w_{i+1}$) بیشتر از P شود، باید ابتدا جعبه را خالی کرد و بعد کالای $i+1$ ام را گذاشت که مقدار خانه $(i+1, w_{i+1}, k)$ ($(i+1, j, w_{i+1})$) بازبینی می‌شود. لازم به ذکر است از خانه (i, j, k) فقط این خانه‌ها قابل بازبینی هستند. پس در کل، در زمان $O(nP^2)$ این جدول پر می‌شود. و جواب مسئله $\min_{1\le i\le P, 1\le j\le P}\{d(n,i,j)\}$ می‌باشد.

تمرین هفتم: بسته‌بندی کمینه ..... $O(nP)$

$d(i,j)$ کمترین تعداد جعبه برای بسته‌بندی i کالای اول به طوری که در در جعبه آخر j کیلو جای خالی باقی بماند؛ همچنین در این حالت $p(i,j)$ مقدار کمترین گنجایش برای جعبه دیگر را مشخص می‌کند. برای پرکردن خانه‌های این جدول، مثل سوال قبل عمل می‌کنیم فقط با این فرق که در هر بازبینی یک خانه مقدار $p(i,j)$ را نیز بازبینی می‌کنیم. در نتیجه چون بازبینی خانه‌ها در سوال قبل از $O(1)$ بود و در این سوال جدول ما $O(nP)$ خانه دارد، در کل در زمان $O(nP)$ جواب که $\min_{i=1}^{P}\{d(n,i)\}$ است بدست می‌آید.

تمرین هشتم: پیدا کردن کالاهای استفاده شده در کوله‌پشتی در حافضه $O(W)$ ..... $O(nW)$

به ازای هر j ($1 \le j \le W$) اولین i ای را نگه می‌داریم که بتوان با i جنس اول j کیلو را ساخت. با این کار اولین i ای که با i جنس اول W قابل ساخت باشد را در نظر بگیرید. پس i استفاده شده است. از W مقدار w_i تا کم کنید. حال برای W جدید ما اولین i ای که بتوان با i جنس اول W ی جدید را ساخت داریم. دوباره i جدید را در نظر گرفته و از W مقدار w_i تا کم کنید و با ادامه این کار اجناس استفاده شده بدست می‌آیند.

سوال: سعی کنید در همه تمرین‌های بالا مقدار حافظه‌ای که استفاده می‌شود را تا جای امکان کم کنید.