

باسمه تعالی

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون تئوری سوم

پنج شنبه ۶ مرداد ۱۳۹۰

وقت: ۵ ساعت

عابدی، جبل عاملی، عابدی

مسئله‌ی اول. دنباله‌ی درختی ..... ۲۵ امتیاز

درختی با رئوس ۱ تا  $n$  در نظر بگیرید. در طی  $n$  مرحله، در هر مرحله یکی از رئوس را طوری حذف می‌کنیم که گراف باقیمانده همبند بماند. تعداد حالات ممکن برای این کار را عدد این درخت می‌نامیم. مجموع عدد تمام درختهای ممکن را بیابید. (به طور مثال برای  $n = 3$ ، این مجموع برابر ۱۲ است)

مسئله‌ی دوم. حذف یال ..... ۴۰ امتیاز

درختی داریم که  $n$  راس دارد. در هر مرحله می‌توانیم به ازای هر مولفه از این درخت دقیقاً یکی از ۲ کار زیر را انجام دهیم.

• یک یال دلخواه را از مولفه حذف کنیم.

• همه‌ی برگ‌ها را در مولفه حذف کنیم.

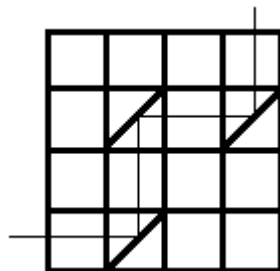
دقت کنید که در یک مرحله می‌توان روی دو مولفه کار متفاوتی انجام داد. ثابت کنید :

الف: به ازای هر درخت می‌توان مراحل را طوری انجام داد که در  $O(\sqrt{n})$  مرحله همه‌ی یال‌ها حذف بشوند.

ب: به ازای هر  $n$  مثالی بنویسید که به  $\Omega(\sqrt{n})$  مرحله نیاز باشد تا همه‌ی یال‌ها حذف شوند.

مسئله‌ی سوم. آینه‌ی یابی ..... ۳۵ امتیاز

در بعضی از خانه‌های یک جدول  $n \times n$ ، تعدادی آینه قرار داده‌ایم. تمام آینه‌های موجود به شکل قطری از بالا راست به پایین چپ قرار دارند، بطوریکه اگر پرتویی از پایین به آنها برخورد کند به سمت راست حرکت خواهد کرد و اگر از سمت چپ برخورد کند، به بالا می‌رود.



ما از چینش آینه‌ها خبر نداریم. می‌خواهیم بدانیم در چه خانه‌هایی آینه قرار دارد. برای اینکار می‌توانیم یک سطر

یا ستون را انتخاب کنیم و پرتویی را از سمت چپ و یا پایین جدول به داخل آن بتابانیم و مسیر حرکت آن تا خارج شدن از جدول را ببینیم. در بدترین حالت حداقل چند پرتو باید تابانده شود تا به هدفمان برسیم؟