

به نام خدای مهربانی‌ها

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

## آزمون نهایی درس الگوریتم‌ها

شنبه ۸ مردادماه ۱۳۹۰

جبل عاملی، بابایی، زادی‌مقدم، بابایی، احمدی‌نژاد

مدت آزمون: ۲۰۵ دقیقه

## مسئله‌ی اول. شکلات‌ها ..... ۱۵ نمره

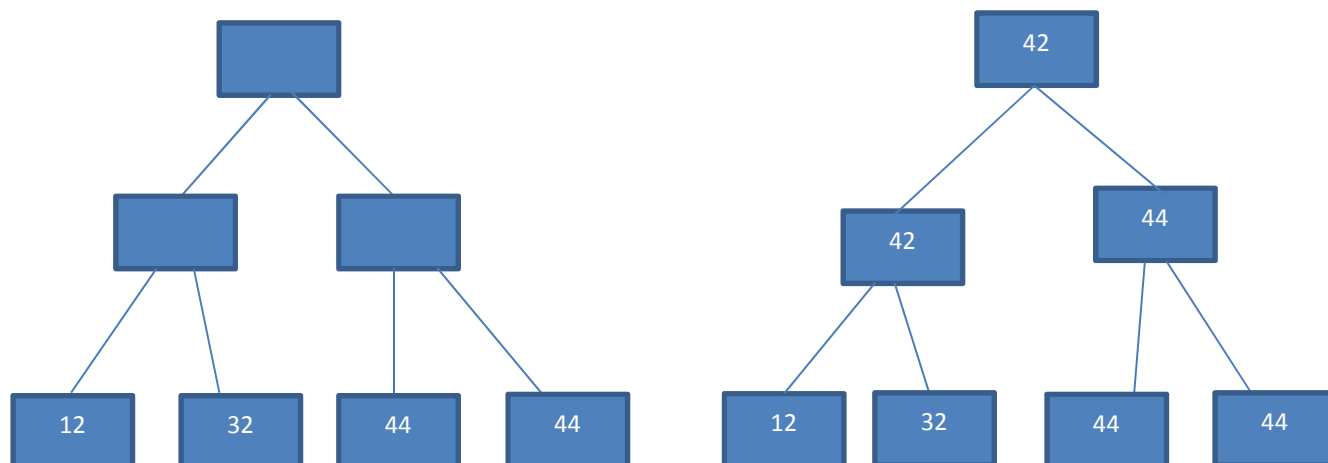
در بعضی از خانه‌های یک مکعب  $n * n * n$  تعدادی شکلات قرار دارد و احمد و پارسا می‌خواهند یک بازی بکنند. در این بازی ابتدا پارسا کل مکعب را در اختیار دارد. در هر مرحله از بازی اگر یک مکعب  $k * k * k$  باقی مانده باشد نفری که نوبتش هست می‌تواند یکی از مکعب‌های  $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor * \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor * \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$  درون آن را انتخاب کند و بازی را به نفر بعدی واگذارد و نفر بعدی با آن مکعب بازی را ادامه می‌دهد. در صورتی که به یک نفر مکعبی برسد که درون آن شکلات وجود نداشته باشد آن فرد بازنده است و نفر قبلی او برنده می‌شود و در صورتی که به یک نفر مکعب  $1 * 1 * 1$  برسد که درونش شکلات است، آن فرد برنده است. برای یک مکعب که وضعیت خانه‌های آن را می‌دانیم الگوریتمی با مرتبه زمانی  $O(n^6)$  و حافظه  $O(n^3)$  ارائه دهید که مشخص کند در صورتی که پارسا و احمد هر دو به بهترین شکل بازی کنند چه کسی برنده است.

## مسئله‌ی دوم. منبع‌های آب ..... ۲۰ نمره

در یک کشور  $n$  شهر وجود دارد که در هر یک از آنها یک منبع آب قرار دارد. در بین برخی از شهرها جاده‌هایی ایجاد شده است که راه‌های ارتباطی این شهرها را تشکیل می‌دهد، در ضمن پیمودن هر جاده که بین دو شهر ایجاد شده است یک روز طول می‌کشد. در هر شهر تعدادی آدم زندگی می‌کند. در یک عملیات خرابکارانه منابع آب همه شهرها سوراخ می‌شود. می‌دانیم در ابتدای کار در منبع شهر  $i$  ام  $V_i$  متر مکعب آب وجود دارد و بعد از سوراخ شدن منبع‌ها در هر روز یک مترمکعب از آب هر منبع کم می‌شود. ما شهرها را به ترتیب صعودی میزان آب اولیه‌شان داریم. ساکنین همه شهرها بعد از این اتفاق تصمیم به مهاجرت می‌گیرند (ممکن است تصمیم بگیرند در شهر خود بمانند). ساکنین یک شهر مقصد خود را شهری انتخاب می‌کنند که در زمان رسیدن به آن شهر منبع آبش بیشترین آب را داشته باشد. الگوریتمی از  $O(n + m)$  که  $n$  تعداد شهرها و  $m$  تعداد جاده‌هاست ارائه دهید که مقصد مردم هر شهر را بیابد ( $V_i$ ها عدد صحیح هستند).

## مسئله‌ی سوم. درخت رقمی ..... ۲۰ نمره

یک درخت دودوی با  $n$  برگ داریم. روی هر یک از برگ‌ها یک رشته به طول  $m$  با حروف  $\{1, 2, 3, 4\}$  نوشته شده است. ما می‌خواهیم روی راس‌های درونی درخت رشته‌های به طول  $m$  بنویسیم به طوری که مجموع کل فاصله‌های رشته هر راس با رشته پدرش کمینه شود. در حالت کلی یک الگوریتم از  $O(mn)$  ارائه دهید که با گرفتن رشته‌های مربوط به برگ‌ها و ساختار درخت رشته‌های بهینه برای رؤوس درونی درخت را بدست آورد. دقت کنید درخت دودویی درختی است که هر راس آن یا برگ است یا دو فرزند دارد. بعنوان نمونه در شکل زیر یک درخت و جواب آن آمده است. در این درخت 6 یال وجود دارد که هزینه سه یال 1 و هزینه بقیه یال‌ها صفر می‌باشد.



### مسئله‌ی چهارم. گوی‌های خمیری ..... ۲۰ نمره

$n$  گوی خمیری در یک ردیف قرار گرفته اند. می دانیم وزن گوی  $i$  ام از سمت چپ  $w_i$  و فاصله آن از سمت چپ ترین گوی  $x_i$  می باشد (اعداد حقیقی هستند). در ابتدای کار هر یک از گوی ها با سرعت ثابت 1 شروع به حرکت می کند. هر گوی یا به سمت راست حرکت می کند یا به سمت چپ. اگر دو گوی در یک لحظه با هم برخورد کنند (در یک مختصات قرار گیرند) گوی کوچکتر در گوی بزرگتر ادغام می شود و گوی جدید که وزنش به اندازه مجموع دو گوی قبلی است در جهت گوی بزرگ تر به حرکت خود ادامه می دهد. با دانستن وضعیت گوی ها به ترتیب از سمت چپ ترین گوی الگوریتمی از  $O(n)$  ارائه دهید که مشخص کند در نهایت چه گوی هایی باقی می ماند و در کدام جهت حرکت می کنند.

### مسئله‌ی پنجم. مسابقه گرافی ..... ۲۵ نمره

معلم علی برای یک مسابقه یال های گرافی همبند با  $n$  راس و  $e$  یال را با شماره های 1 تا  $e$  شماره گذاری کرده است. او به هر راس نیز یک شماره  $c_i$  نسبت داده است که  $c_i$  برابر کمینه عدد یال های مجاور راس  $i$  می باشد. معلم یال های گراف به همراه  $c_i$  ها را به بچه ها داده است. برنده مسابقه کسی است که یال های گراف را طوری شماره گذاری کند که با شرایط فوق همخوانی داشته باشد و همچنین وزن درخت پوشای کمینه آن از همه کمتر باشد. الگوریتمی از  $O(n \lg n + e)$  ارائه دهید که در این امر علی را یاری کند.

«موفق باشید»