

باسمه تعالی
دوره‌ی آموزشی المپیاد کامپیوتر
امتحان نظری اصلی دوم

پنج‌شنبه ۲۹ تیرماه ۱۳۸۵

محرابیان وقت: ۵ ساعت

مسئله‌ی اول: زیردرخت‌ها ۳۰ نمره

دو زیردرخت فراگیر T و T' از گراف همبند G داده شده‌است. ثابت کنید نگاشت یک‌به‌یک و پوشای $f: E(T) \rightarrow E(T')$ وجود دارد به طوری که برای هر $e \in E(T)$ ، $T - e + f(e)$ نیز یک درخت باشد.

مسئله‌ی دوم: قالب ریخته‌گری ۳۰ نمره

یک قالب ریخته‌گری دو بُعدی داریم که به شکل مستطیلی است که یک حفره‌ی چندضلعی از آن بُرده‌ایم، و این حفره فقط قسمتی از ضلع بالایی مستطیل را قطع می‌کند (و ضلع دیگری از مستطیل را قطع نمی‌کند). به شکل ۱ دقت کنید. از بالا آهن مذاب می‌ریزیم تا حفره را پر کند. پس از سرد شدن می‌خواهیم جسم حاصل را از قالب بیرون بکشیم، دقت کنید به دلیل شکل حفره، در آغاز کار فقط ضلع بالایی جسم مجاور هوای آزاد است. در طول بیرون کشیدن، مرز جسم می‌تواند روی مرز قالب بلغزد.

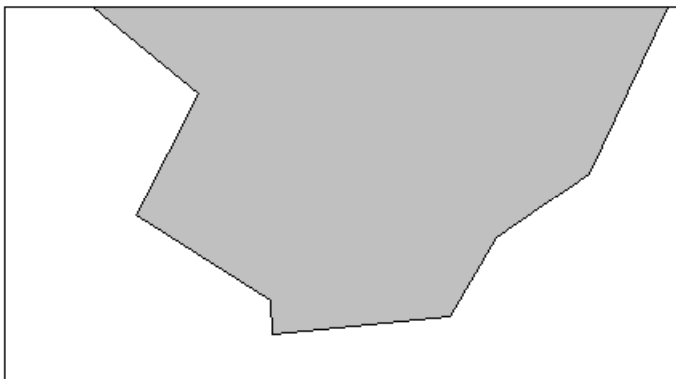
بعضی جهت‌ها هستند که با یک انتقال در آن جهت‌ها شکل بطور کامل از قالب در می‌آید (دوران نداریم). الگوریتمی با زمان چند جمله‌ای بر حسب تعداد رئوس حفره بدهید که همه‌ی این جهت‌ها را مشخص کند. البته ممکن است شکل قالب طوری باشد که چنین جهتی وجود نداشته باشد. خروجی الگوریتم می‌تواند تعدادی زاویه‌ی مجاز و تعدادی بازه‌ی زاویه‌ای مجاز باشد.

راهنمایی: می‌توان نشان داد که اگر در یک جهت، شکل بتواند کمی حرکت کند بدون این‌که به قالب برخورد کند، آن‌گاه با حرکت در آن جهت می‌توان شکل را بیرون آورد.

مسئله‌ی سوم: بچه‌های شلوغ و کفش‌های بینوا ۴۰ نمره

بچه‌های دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر امسال (که ۳۲ نفرند)، بعد از ظهر جمعه برای شرکت در کلاس عملی وارد سایت می‌شوند. آن‌ها قبل از ورود، کفش‌های خود را درآورده در جاکفشی دم در سایت قرار می‌دهند. پس از مدتی، مسئول کلاس یکی از بچه‌ها را به طور تصادفی از کلاس بیرون می‌کند، و آن بچه بدون پوشیدن کفش از باشگاه خارج می‌شود. مسئول با عصبانیت یک جفت کفش را به طور تصادفی انتخاب کرده و از پنجره به بیرون پرتاب می‌کند.

بعد از گذشت چهار ساعت کلاس تمام شده و بچه‌ها یکی‌یکی، با ترتیبی تصادفی از سایت بیرون می‌روند. هر نفر، اگر کفش خودش در جاکفشی بود کفش خودش را می‌پوشد، در غیر این صورت کفشی را انتخاب می‌کند که شماره‌اش به شماره کفش او نزدیک‌ترین مقدار ممکن باشد. فرض کنید شماره‌ی هر دو کفشی متفاوت است، به علاوه هیچ دو کفشی نیستند که به یک اندازه شماره‌شان به شماره کفش او نزدیک باشد، یعنی شخص می‌تواند به طور یکتا کفشی را انتخاب کند. ضمناً هر نفر بعد از انتخاب یک کفش آن را می‌پوشد و شخص دیگری نمی‌تواند آن کفش را



شکل ۱: جسمی که می‌تواند از قالب خارج شود.

انتخاب کند.

احتمال این را به دست آورید که نفر آخر کفش خودش را بپوشد.