

باسمه تعالی

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نهایی نظری دوم

سه شنبه ۱۲ شهریور ۱۳۹۲

وقت: ۵ ساعت

جبل عاملی

مسئله اول: جمعه در مقابل بهترین خط دفاع لیگ ۲۵ امتیاز

اگر $f(n, k)$ برابر با حداقل تعداد یال‌های لازم برای یک گراف ساده و n راسی باشد که دوری به اندازه k لااقل داشته باشد $\theta(f(n, k))$ را بیابید. (در صورتی که کران بالای شما بیشتر از $\frac{1}{4}$ کران پایین باشد ۲۰ نمره از این سوال می‌گیرید).

مسئله دوم: گل خلعت گل بیرون بیا ۴۵ امتیاز

تعداد n جعبه داریم با شماره‌های ۱ تا n . در ابتدای کار میزی خالی داریم. حال در مرحله i ام $0 < i \leq n$ اگر k جعبه روی میز بود به احتمال $\frac{1}{k+1}$ جعبه i در هر یک از جعبه‌های روی زمین قرار می‌گیرد و از بین می‌رود و به احتمال $\frac{1}{k+1}$ در جایی خالی روی میز فرار می‌گیرد. امید ریاضی تعداد جعبه‌هایی که در نهایت روی زمین قرار می‌گیرد را $e(n)$ بگیرید.

الف) ثابت کنید $e(n)$ از $\omega(\lg n)$ است. (۱۰ نمره)

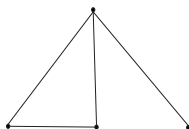
ب) ثابت کنید $e(n)$ از $O(\sqrt{n})$ است. (۲۵ نمره)

ج) $\theta(e(n))$ را بیابید. (۱۰ نمره)

مثلاً $e(3) = \frac{19}{11}$ است. (در این سوال به میزان دقیق بودن استدلال نمره می‌گیرید)

مسئله سوم: الگوریتم رمزی رضایا ارمین ۴۰ امتیاز

گرافی n راسی به ما داده شده است. الگوریتمی از زمان چند جمله‌ای بر حسب n ارایه دهید که در این گراف یا خوشه‌ای به اندازه k بیابید یا گراف آقا جبل ۴ راسی (گراف نشان داده شده در شکل زیر). همچنین، اگر هیچکدام از این گرافها نیز موجود نمی‌باشند، الگوریتم باید تشخیص دهد.



شکل ۱: آقا جبل ۴ راسی