

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نهایی نظری سوم

وقت: ۴.۵ ساعت

یک شنبه ۲۶ شهریور ۱۳۹۱

مسئله اول. مهره‌های متحرک ۳۰ امتیاز

تعداد n جعبه که در هر کدام یک مهره قرار داده شده است داریم. در یک ماتریس $n \times n$ فاصله دو به دوی جعبه‌ها آمده است، یعنی در درایه ij ماتریس فاصله جعبه i از j داده شده است. در هر لحظه هر مهره از جعبه خود به جعبه‌ای می‌رود که کمترین فاصله را دارد. در صورت یکتا نبودن این جعبه به یکی از جعبه‌ها با کمترین فاصله به دلخواه ما می‌تواند برود. الگوریتمی از $O(n^2)$ ارائه دهید که مشخص کند آیا زمانی وجود دارد که همه‌ی مهره‌ها در یک جعبه قرار بگیرند یا خیر.

مسئله دوم. محدودیت بار ۳۰ امتیاز

تعداد n شهر و e جاده بین آن‌ها داده شده است. جاده‌ها یک طرفه هستند و هر جاده وزنی دارد که برابر ماکسیمم باری است که از طریق آن جاده می‌توان منتقل کرد. بیشترین باری که بین دو شهر u و v می‌توان منتقل کرد برابر ماکسیمم وزن جاده‌ها با مینیمم وزن بین تمام مسیرهای بین این دو شهر است. الگوریتمی از $O(ne + n^2)$ ارائه دهید که این مقدار را برای تمام جفت شهرها بدست آورد.

مسئله سوم. سوال استاد ۴۰ امتیاز

درختی n راسی داده شده است. می‌خواهیم یال‌های آن را طوری جهت‌دهی کنیم که درجه‌ی خروجی هیچ دو راس مجاوری برابر نباشد.

الف) ثابت کنید می‌توان طوری اینکار را انجام داد که درجه‌ی خروجی هر راس حداکثر برابر با "چهار" باشد. (امتیاز ۲۰)

ب) درختی ارائه دهید که درجه خروجی ماکسیمم در آن با شرایط گفته شده حداقل ۳ باشد. (امتیاز ۱۰)

ج) درختی ارائه دهید که درجه خروجی ماکسیمم در آن با شرایط گفته شده حداقل ۴ باشد. (امتیاز ۱۰)