

باسمه تعالی

دوره تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون پایان ترم درس الگوریتم

جمعه 30 تیر 1391

مدرس: احمدی نژاد، بابایی

وقت 4 ساعت

سوال یک. تحلیل مرتبه 15 امتیاز

- الف. مرتبه زمانی رابطه‌های بازگشتی زیر را محاسبه کرده و آنها را با هم مقایسه کنید (10 امتیاز).

$$T(n) = \sqrt{n} T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$T(n) = 2T(n-1) + 2T(n-2) + \dots + 2T(2) + 2T(1)$$

- ب. مرتبه زمانی رابطه بازگشتی زیر را محاسبه کنید (5 امتیاز):

$$T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + \lg^3 n$$

در هر دو قسمت برای اثبات جواب لازم نیست از روش جایگذاری استفاده کنید، اما باید روش اثبات تان در حد قابل قبولی دقیق باشد.

سوال دو. ددج 20 امتیاز

در یک درخت دودویی جستجو علاوه بر اطلاعات عادی هر گره، به ازای هر گره x مقدار $num[x]$ تعداد گره‌های زیردرخت به ریشه x را نشان می‌دهد. حال فرض کنید دو درخت دودویی جستجوی T_1 و T_2 هر کدام با n راس و ارتفاع از $O(\lg n)$ وجود دارند، الگوریتمی کارا برای پیدا کردن میانه این $2n$ عنصر ارائه دهید، الگوریتم خود را با شبه کد توضیح دهید.

سوال سه. مسیرهای سخت 20 امتیاز

در گراف وزن دار G با n راس و m یال یک مسیر سخت مسیری است از u به v مانند

$$u = u_1, u_2, \dots, u_k = v$$

که به ازای $1 \leq i \leq k-2$ داشته باشیم:

$$w(u_i, u_{i+1}) \leq w(u_{i+1}, u_{i+2})$$

با فرض اینکه وزن یال‌ها عددی بین 1 تا n^3 است، الگوریتمی خطی ($O(n+m)$) ارائه دهید که طول کوتاهترین مسیر سخت از راس s به بقیه راس‌ها در گراف G را بیابد.

سوال چهارم. درخت BFS ای 20 امتیاز

گراف همبند و ساده‌ی G با n راس و یک زیردرخت پوشا از آن با نام T به ما داده شده است. الگوریتمی از $O(n^2)$ ارائه دهید که مشخص کند آیا زیردرخت T می‌تواند، یک درخت BFS از گراف G باشد یا خیر.

درخت BFS درختی است که قابل تولید توسط الگوریتم BFS (با استفاده از لیست مجاورت) باشد. یعنی ترتیبی از رئوس در لیست همسایگان هر راس وجود داشته باشد که پس اجرای الگوریتم BFS درخت مورد نظر تولید شود.

سوال پنجم. یکتاسازی 20 امتیاز

مساله یکتاسازی بدین شکل تعریف می‌شود:

ورودی: یک دنباله از اعداد

خروجی: افراز اعداد دنباله ورودی به تعدادی دسته، با این شرط که دو عدد با هم برابر هستند اگر و فقط اگر در یک دسته باشند. (اعداد هر دسته با اندیس‌شان مشخص می‌شوند)

• الف. اثبات کنید که هر الگوریتم یکتاسازی مبتنی بر مقایسه روی n عنصر از $\Omega(n \lg n)$ است. (10 امتیاز)

• ب. فرض کنید یک لیست مجاورت از یال‌های یک گراف در اختیار داریم. الگوریتمی خطی $O(n + m)$ برای حذف یال‌های تکراری در این لیست ارائه دهید. (10 امتیاز)
نکته: در نظر گرفتن یک حافظه به طول k زمان $O(k)$ لازم دارد

• ج. آیا الگوریتم شما در قسمت ب، مثال نقضی برای اثبات قسمت الف نیست؟ (امتیازی ندارد. صرفاً جهت اینکه از الگوریتم خود اطمینان حاصل کنید.)

سوال ششم. خیکوله 25 امتیاز

اخیراً شایعه شده تعدادی از شخصیت‌های سابق المپiad کامپیوتر سعی بر جوسازی علیه خیکوله را داشته‌اند. برای همین او که خود را قهرمان بلامنازع تمامی دوران‌های المپiad می‌دانست، از شخصیت‌های مدعی دعوت به عمل آورد تا در یک رقابت هرآن‌چه در توان دارند به نمایش بگذارند و به چشم خود به قدرت خیکوله پی ببرند!

رقابت به این شکل است که خیکوله باید از یک راهرو عبور کند. n شخصیت مدعی به ترتیب در طول این راهرو ایستاده‌اند. انرژی خیکوله در ابتدا برابر k (بیشترین مقدار ممکن) است و پس از مبارزه با قهرمان i ام انرژی‌اش به مقدار c_i کاهش پیدا می‌کند. اگر انرژی خیکوله به صفر (یا کمتر از آن) برسد او جان خود را از دست می‌دهد!

خیکوله پس از شکست دادن قهرمان i ام هرچند ساعت که بخواهد می‌تواند استراحت کند و به ازای هر یک ساعت استراحت انرژی‌اش به میزان e_i افزایش پیدا می‌کند. (توجه کنید که به ازای هر i ، e_i ها فرق می‌کند.) البته انرژی او

هیچگاه از مقدار k بیشتر نمی‌شود. هدف خیکوله این است که با صرف کمترین زمان برای استراحت، همه‌ی قهرمان‌ها را شکست دهد و به آخر راهرو برسد.

- الف) فرض کنید که خیکوله می‌تواند در یک مکان کسری از ساعت (و نه لزوماً مضربی از ساعت) استراحت کند. در این حالت الگوریتمی خطی ارائه کنید که کمترین زمان برای عبور از راهرو را حساب کند. (20 امتیاز)

- ب) فرض کنید که خیکوله در یک مکان فقط به تعداد مضارب صحیح از یک ساعت می‌تواند استراحت کند. در این صورت آیا الگوریتم بالا نیاز به تغییر دارد؟ اگر جواب‌تان مثبت است تغییرات لازم را توضیح دهید. (5 امتیاز)